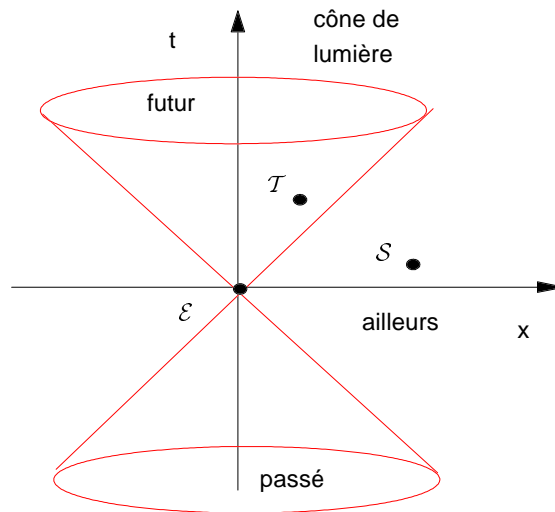


Mécanique classique I

L. Marleau



Mécanique classique I

L. Marleau

Cet ouvrage a été rédigé avec *Scientific WorkPlace*
et composé avec $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$.
Copyright © 1997. Tous droits réservés.
L. Marleau
Département de physique
Université Laval
Québec, Canada.

Table des matières

Avant-Propos	ix
1 VITESSE DE LA LUMIÈRE	1
1.1 Mesures de la vitesse de la lumière	1
1.2 Effet Doppler (non-relativiste, ondes sonores)	4
Source en mouvement, récepteur fixe dans le milieu propagateur	4
Source au repos dans le milieu et récepteur en mouvement	5
1.3 Application: récession des galaxies - "red shift"	6
1.4 Repères inertiels en mouvement relatifs	7
1.5 Expérience de Michelson-Morley	7
1.6 Invariance de la vitesse de la lumière	10
1.7 La vitesse ultime	12
2 PRINCIPES DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE	15
2.1 Les principes fondamentaux	15
Le principe de relativité	15
Universalité de la vitesse de la lumière	17
2.2 Relativité et géométrie: les diagrammes espace-temps	19
Système de coordonnées d'un autre observateur	20
2.3 L'intervalle et son invariance	22
2.4 Classification des événements	27
Relation de causalité	27
2.5 Limites de la relativité restreinte	28
2.6 Une nouvelle cinématique	28
Calibration des axes	28

3	TRANSFORMATIONS DE LORENTZ	31
3.1	Transformations de Lorentz	31
3.2	Addition de vitesses	34
3.3	Exemples d'addition de vitesses	36
3.4	Contraction de l'espace	37
3.5	Dilatation du temps	39
	Une vérification expérimentale	41
3.6	Effet Doppler: cas relativiste	43
	Cas du mouvement longitudinal	43
	Cas du mouvement transversal	44
3.7	Horloges accélérées	46
3.8	Formalisme quadri-dimensionnel	46
4	DYNAMIQUE RELATIVISTE	53
4.1	Conservation de la quantité de mouvement	53
4.2	Énergie cinétique	56
4.3	Le quadri-vecteur d'énergie-impulsion	56
4.4	Travail et énergie cinétique	59
4.5	Transformations de Lorentz de \mathbf{p} et E	59
4.6	Exemple: collision inélastique	60
4.7	Exemples quantitatifs	62
4.8	Particules de masse nulle	62
4.9	Effet Doppler-nouvelle approche	63
4.10	Pression de radiation	63
4.11	Transformation d'une force	63
4.12	Invariance de la charge électrique	64
4.13	Le test: les accélérateurs de particules	65
4.14	Problèmes de dynamique relativiste	65
	Accélération dans un champ électrique constant	65
	Déflexion dans un champ électrique	68
	Particule dans un champ magnétique	69
	Seuil de réactions	69
	Vitesse du CM d'un système relativiste	71
	Énergie disponible	72
	Effet Compton	72

5	LES REPÈRES ACCÉLÉRÉS	75
5.1	Rappel—Quelques problèmes en dynamique de Newton	75
	La deuxième loi de Newton	75
	Le frottement sec	76
	Le mouvement circulaire	77
5.2	Les repères accélérés	77
5.3	Repères accélérés linéairement	77
5.4	Repères en rotation: introduction	78
	Objet au repos par rapport au disque	80
	Objet en mouvement par rapport au disque	83
	Analyse des accélérations par rapport à S et à S'	85
5.5	Repères en rotation (cas général)	88
5.6	Mouvements observés de la surface de la Terre	91
	Gravité apparente	91
	Mouvement d'un projectile près de la surface de la Terre	93
6	DYNAMIQUE DES SOLIDES	99
6.1	Dynamique d'un ensemble de particules	99
	Centre de masse. Conservation de l'impulsion	100
	Notion de moment cinétique. Conservation du moment cinétique	100
	L'énergie cinétique d'un système de particules	101
6.2	Le corps rigide: Introduction	103
	Rotation d'un corps rigide autour d'un axe fixe	104
	Moments d'inertie de divers corps	105
	Équation de mouvement et cinématique de rotation	113
	Conservation du moment cinétique. Quelques exemples	113
6.3	Mouvements combinés de translation et de rotation	113
	Frottement, glissement et roulement	114
6.4	Dynamique de la rotation	116
6.5	Corps rigide et conservation de l'énergie	117
6.6	Percussion et rotation	119
6.7	Caractère particulier de la relation entre moment cinétique et vitesse angulaire	122
6.8	Introduction au gyroscope	126
	Gyroscope soumis à un moment de force constant	127
	Précession des équinoxes	129

A	Notations, conventions,...	133
A.1	Notations et conventions	133
A.2	Systèmes de coordonnées	135
	Coordonnées cylindriques	136
A.3	Aide-mémoire	139
A.4	Références	141

Index	142
--------------	------------

Avant-Propos

Cet ouvrage contient l'essentiel du matériel couvert dans le cours de Mécanique classique I (PHY-10489) du Département de physique de l'Université Laval.

Il suppose que certaines notions de mécanique newtonienne sont déjà acquises telles que les lois de Newton. Les notes couvrent la relativité restreinte, les repères accélérés et les corps rigides. Les notions de relativité restreinte sont les premières introduites (chapitres 1, 2, 3 et 4) bien qu'historiquement elles soient les plus récentes. Ce choix est motivé par le souci que ces notions, moins intuitives, aient le temps d'être assimilées pendant le trimestre. Les notions de mécanique avancée (repères accélérés et corps rigides) sont traitées aux chapitres 5 et 6. L'appendice contient un résumé des notations, un aide-mémoire et quelques références complémentaires.

Québec
Mai 1997

Luc Marleau
Département de Physique
Université Laval

1 VITESSE DE LA LUMIÈRE

La vitesse de la lumière (dans le vide) est une constante fondamentale:

1. C'est la vitesse de propagation de la radiation électromagnétique de toutes fréquences.
2. C'est la vitesse ultime de tout signal.
3. Elle est la même dans tous les systèmes de référence.

$$c = 2.9979... \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (1.1)$$

4. Elle intervient directement dans les équations de Maxwell de l'électromagnétisme ($\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2} \text{ SI}$).
5. Elle intervient dans la constante adimensionnelle de "structures fines" : $\alpha = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h c} \simeq \frac{1}{137.036}$. Cette constante joue un rôle fondamental en physique atomique et sa valeur n'est prédite par aucune théorie!

1.1 Mesures de la vitesse de la lumière

La vitesse de la lumière a été un élément important dans l'élaboration de la relativité restreinte et dans la remise en question de la mécanique de Newton. Historiquement, elle a d'abord été implicitement présumée comme une quantité infinie, i.e. l'information était transmise instantanément. Plus tard, certaines méthodes de mesures ont été utilisées pour déterminer la vitesse de la lumière qui s'est avérée finie. Mais la nature ondulatoire de la lumière posait problème: Comment une onde pouvait-elle se propager sans support matériel (dans le vide)? Ceci mena à l'hypothèse de l'*éther* et éventuellement à l'expérience de Michelson-Morley...

Les premières mesures de la vitesse de la lumière furent les suivantes:

1. Temps de transit à travers l'orbite terrestre (Roemer, 1676):

Cette mesure est basée sur la variation dans la période des éclipses du satellite Io de Jupiter pendant une année. Cette période varie suivant que la Terre se trouve plus ou moins rapprochée de Jupiter et de son satellite (voir figure 1.1). Ici $\Delta t = \frac{L}{c}$ et

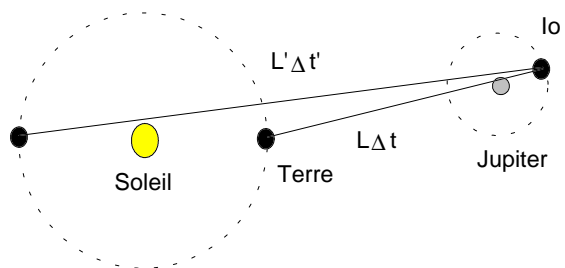


Figure 1.1 Trajectoire de la lumière de Io, le satellite de Jupiter, à l'observateur situé sur la Terre.

$$\Delta t' = \frac{L'}{c} = \frac{L+D}{c}, \text{ alors}$$

$$c = \frac{D}{(\Delta t' - \Delta t)} \quad (1.2)$$

où D = diamètre d'orbite terrestre et $(\Delta t' - \Delta t)$ est la différence entre les temps de transit de la lumière d'Io jusqu'à la Terre. Ce qui donne $c_{\text{Roemer}} \simeq 214300 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.

2. Aberration des étoiles (Bradley, 1725):

Une étoile au zénith semble, au cours d'une année, décrire une trajectoire circulaire (voir figure 1.2). Cette aberration est due à la vitesse tangentielle de l'observateur terrestre

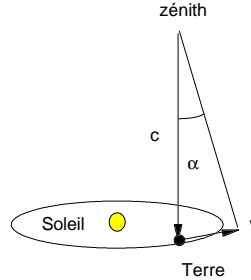


Figure 1.2 L'aberration des étoiles est la conséquence de la vitesse tangentielle de l'observateur terrestre.

Le diamètre angulaire de la trajectoire de l'étoile:

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan\left(\frac{v_{\text{Terre}}}{c}\right) \\ &\sim 1.0 \times 10^{-4} \text{ rad.} \simeq 41'' \end{aligned} \quad (1.3)$$

Les observations de Bradley lui indiquait un valeur de l'angle $\alpha_{\text{Bradley}} \simeq 40.5''$.

3. Miroirs rotatifs ou roue dentée de Fizeau (1849):

Avec un système ingénieux d'interrupteurs de lumière (roue dentée), Fizeau fut le premier à réaliser un mesure de la vitesse de la lumière en laboratoire. Plus tard, Michelson précisa ses mesures avec un appareillage basé sur le même principe:

En mesurant le temps de transit sur une distance de $2 \times 8633 \text{ m}$, Fizeau obtient: $c_{\text{Fizeau}} \simeq 315\,300 \pm 500 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.

Michelson réalise une expérience similaire sur 35 km en 1927 et mesure: $c_{\text{Mich.}} = 299796 \pm 4 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.

4. Cavité résonante (~1950):

La mesure de fréquence de résonance dans une cavité métallique est donné par $\nu = \frac{c}{2l}$, où l = longueur de la cavité. Cette mesure fut réalisée par Essen et donna: $c_{\text{Essen}} = 299792.5 \pm 1 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.

5. Radar.

6. Détecteur de lumière modulée... etc...

Des centaines de mesures, dans tous les domaines de fréquence, donnent

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (1.4)$$

Maintenant, cette quantité sert de relation entre les étalons de longueur et de temps (c'est pourquoi on omet l'incertitude).

1.2 Effet Doppler (non-relativiste, ondes sonores)

L'effet Doppler est le changement de la fréquence d'une onde observée par un détecteur en raison de sa vitesse par rapport à la source émettrice.

Étudions d'abord cet effet pour une onde sonore qui ne peut se propager que dans un milieu physique.

Source en mouvement, récepteur fixe dans le milieu propagateur

Prenons une source en mouvement avec un récepteur fixe dans le milieu propagateur (voir figure 1.3)

$$\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}: \text{ vitesse de la source vers le récepteur.} \quad (1.5)$$

La vitesse du son dépend seulement du milieu et est indépendante du mouvement de la source. Dans un milieu homogène elle est constante et déterminée par la densité et l'élasticité du milieu.

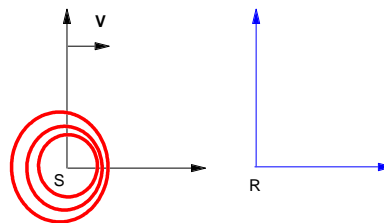


Figure 1.3 Un signal lumineux est émis par une source (S) en mouvement et capté par un récepteur (R) fixe par rapport au milieu de propagation.

Si en un point fixe du milieu, il passe ν_R pulsations par seconde, chacune séparée d'une distance λ_R , la vitesse de propagation est

$$\lambda_R \nu_R = v. \quad (1.6)$$

Si la source émet N pulsations durant Δt , ce train d'impulsion occupe une distance $(v - V)\Delta t$ et la longueur d'onde est

$$\lambda_R = \frac{(v - V)}{N} \Delta t. \quad (1.7)$$

La fréquence est

$$\nu_R = \frac{v}{\lambda_R} = \frac{Nv}{(v - V)\Delta t} \quad (1.8)$$

$$= \frac{N}{\Delta t} \left(\frac{v}{v - V} \right) = \nu_S \left(1 - \frac{V}{v} \right)^{-1} \quad (1.9)$$

où $\nu_S = \frac{N}{\Delta t}$ est la fréquence d'émission de la source.

Pour une source en mouvement vers un détecteur fixe dans ce milieu : (vitesse V constante)

$$\nu_R = \nu_S \left(1 - \frac{V}{v} \right)^{-1} \simeq \nu_S \left(1 + \frac{V}{v} \right) \quad (1.10)$$

si $|V| \ll v$. Si la source s'éloigne plutôt que de se rapprocher on doit remplacer V par $-V$. (Le sifflet du train est plus aigu quand il s'approche et plus grand il s'éloigne!)

Source au repos dans le milieu et récepteur en mouvement

Ici la source est au repos et le récepteur se déplace à la vitesse (voir figure 1.4)

$$\mathbf{V} = -V\hat{\mathbf{x}} : \text{vitesse du récepteur vers la source.} \quad (1.11)$$

Un train de N pulsations occupe la distance $v\Delta t$ et sa vitesse par rapport au récep-

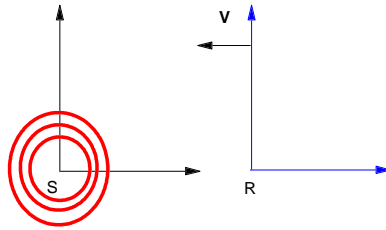


Figure 1.4 Un signal lumineux est émis par une source (S) au repos et capté par un récepteur (R) en mouvement par rapport au milieu de propagation.

teur est $(v + V)$. Le récepteur voit ces N pulsations durant le temps $\frac{v\Delta t}{v+V}$ et mesure la fréquence

$$\nu_R = \frac{N}{\left(\frac{v\Delta t}{v+V}\right)} = \frac{N}{\Delta t} \frac{v+V}{v} = \nu_S \left(1 + \frac{V}{v} \right). \quad (1.12)$$

Pour un récepteur en mouvement vers une source fixe dans le milieu

$$\nu_R = \nu_S \left(1 + \frac{V}{v} \right). \quad (1.13)$$

Si le récepteur s'éloigne on remplace V par $-V$.

On peut déterminer si la source ou la récepteur se déplace par rapport au milieu en mesurant ν_R avec une précision au moins de l'ordre $(\frac{V}{v})^2$. On verra dans le cas de la lumière que cette distinction est impossible.

1.3 Application: récession des galaxies - "red shift"

L'observation spectroscopique de la lumière des galaxies montre que les raies spectrales des éléments sont déplacées vers le rouge (vers les basses fréquences), un déplacement qu'on peut attribuer à un effet Doppler dû à une vitesse de récession des sources. Nous verrons que les formules de l'effet Doppler acoustique sont valide pour la lumière si $V \ll c$:

$$\nu_R \simeq \nu_S \left(1 + \frac{V}{c} \right), \quad \nu_R < \nu_S \quad (1.14)$$

$$\Rightarrow V < 0$$

$$\Rightarrow \text{éloignement des galaxies}$$

$$\frac{\nu_R}{\nu_S} - 1 = \frac{|\Delta\nu|}{\nu_S} = \frac{V}{c}, \quad \text{mesure la vitesse de récession.} \quad (1.15)$$

D'autres observations, capables de mesurer les distances, semblent indiquer que

$$\frac{|\Delta\nu|}{\nu_S} \propto r \quad (1.16)$$

où r est la distance. Il en résulte que $\frac{|V|}{c} \propto r$. C'est-à-dire que les galaxies s'éloignent avec une vitesse proportionnelle à leur distance : $V = \alpha r$

L'explication la plus simple de cette relation est le modèle cosmologique du *Big Bang* selon lequel l'univers aurait été formé d'une immense explosion initiale. Ainsi, les fragments les plus rapides sont présentement les plus éloignés.

Empiriquement, on a une constante de proportionnalité de

$$\frac{1}{\alpha} \simeq 3 \times 10^{17} \text{ s} \simeq 10^{10} \text{ ans} \quad (1.17)$$

$$\frac{c}{\alpha} \sim 10^{26} \text{ m.} \quad (1.18)$$

Ces résultats seraient grossièrement l'âge et le rayon de l'univers.

Exemple 1.1



Certaines raies d'absorption du potassium (K et H) sont près de $\lambda = 3950 \text{ \AA}$. Dans la lumière d'une nébuleuse de la constellation Boötes on les observe à $\lambda \simeq 4470 \text{ \AA}$, d'où

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{520}{3950} \simeq 0.13. \quad (1.19)$$

La fréquence s'écrit $\nu = \frac{c}{\lambda}$. Il en découle donc que la variation de fréquence

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{V}{c} \quad (1.20)$$

ou ici $|V| \simeq 0.13c$, ce qui est très rapide!

1.4 Repères inertiels en mouvement relatifs

Selon la transformation de Galilée des coordonnées dans des repères inertiels en mouvement relatifs par une vitesse \mathbf{V} :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t \quad (1.21)$$

$$t = t' \quad (1.22)$$

et donc

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} \quad (1.23)$$

La vitesse de la lumière perçue par un récepteur s'approchant d'une source avec une vitesse V serait

$$c_R \stackrel{?}{=} c + V. \quad (1.24)$$

Malgré son caractère *raisonnable*, cette relation est incorrecte; on observe

$$c_R = c \quad (1.25)$$

à partir de tout repère en mouvement par rapport à la source!

Remarque 1

C'est le résultat expérimental fondamental! La base de la formulation relativiste des lois de la physique!



Nous allons étudier une expérience conduisant à cette conclusion; celle de Michelson et Morley démontrant que la vitesse de la lumière est indépendante de la vitesse de la terre sur son orbite.

Supposons d'abord, comme on l'a déjà cru, que la lumière, à l'instar du son, a besoin d'un milieu propageur. Cet *éther* devrait déterminer la vitesse de la lumière. On ne saurait de plus accepter l'idée géocentrique que l'*éther* est fixe par rapport à la terre. Il serait plutôt un repère inertiel dans lequel la terre se déplace. L'expérience évidente consiste à mesurer la vitesse de la lumière en un point de la terre dans toutes les directions et en différents moments de l'année. Toutes les répétitions de cette expérience n'ont pas réussi à démontrer un mouvement de la terre par rapport à l'*éther* et conduisent donc à nier son existence.

1.5 Expérience de Michelson-Morley

Deux ondes lumineuses émanant d'une source monochromatique commune interfèrent en se superposant en un point donné. L'intensité lumineuse en ce point sera maximum

ou minimum selon que les ondes y arrivent en phase ou en opposition de phase. La différence de phase peut être due à une différence de la distance parcourue par les deux ondes émises en phase par la source commune (voir figure 1.5).

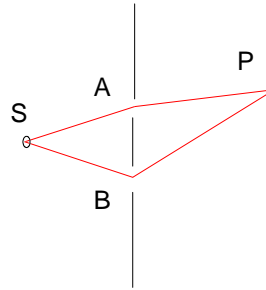


Figure 1.5 Lorsque qu'un signal lumineux S passe par des fentes A et B , on observe un patron d'interférence de la lumière au point P .

Dans l'expérience de Michelson et Morley, un faisceau émanant de S est séparé en deux en A par un miroir semi-transparent... (voir figure 1.6)

Lorsque cet interféromètre est au repos dans l'*éther*, les chemins optique \overline{SABAD} et \overline{SACAD} sont égaux et la différence de phase est nulle. Un patron d'interférence est visible dans l'axe \overline{DA} . Lorsque l'interféromètre se déplace avec la terre dans l'*éther* avec une vitesse V dans la direction de l'axe \overline{AC} , les distances parcourues ne sont plus les mêmes. D'après la transformation de Galilée, on devrait avoir, par rapport à la terre, les vitesses de propagation $c - V$ pour le faisceau qui se propage selon \overline{AC} et $c + V$ pour le retour \overline{CA} . La durée du parcours est

$$\Delta t(AC'A') = \frac{D}{c - V} + \frac{D}{c + V} = \frac{2Dc}{c^2 - V^2} \quad (1.26)$$

$$\simeq \frac{2D}{c} \left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right) \quad (1.27)$$

si $V \ll c$, où D est la longueur des bras \overline{AC} , \overline{AB} , ou \overline{AD} de l'appareil.

Pour le faisceau réfléchi en B , le temps correspondant est (voir figure 1.7)

$$\Delta t(AB'A') = \frac{2l}{c} \quad \text{avec} \quad l^2 = \left(\frac{V}{c} l \right)^2 + D^2 \quad (1.28)$$

donc

$$\begin{aligned} \Delta t(AB'A') &= \frac{2D}{c(1 - \frac{V^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}} \\ &\simeq \frac{2D}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \right) \end{aligned} \quad (1.29)$$

pour $V \ll c$.

La différence de temps à parcourir ces deux trajectoires est

$$\Delta t_1 = \Delta t(AC'A') - \Delta t(AB'A') \simeq \frac{DV^2}{c^3}. \quad (1.30)$$

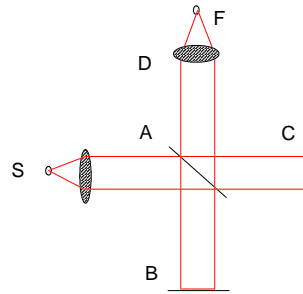


Figure 1.6 L'interféromètre de Michelson et Morley consiste en un système comprenant un faisceau émanant de S séparé en deux en A par un miroir semi-transparent. Après être réfléchi en C et B , les faisceaux reviennent en A et une partie parvient au point F où on observe un patron d'interférence.

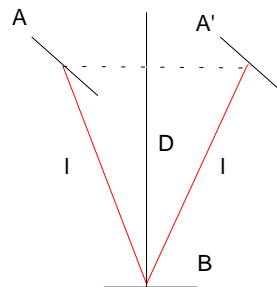


Figure 1.7 Aller-retour de la lumière entre les points A et B dans le repère inertiel de l'éther.

Si on tourne l'interféromètre d'un angle $\frac{\pi}{2}$, la même différence de temps devient (voir figure 1.8)

$$\Delta t_2 \simeq -\frac{DV^2}{c^3}. \quad (1.31)$$

Cette rotation produit, entre les deux faisceaux, une différence de phase

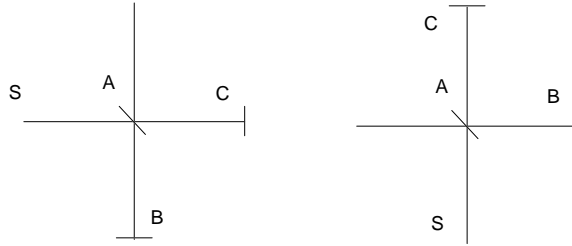


Figure 1.8 La rotation de l'interféromètre de Michelson-Morley aurait comme conséquence de déplacer le patron d'interférence si l'éther existait. Ce n'est pas le cas.

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \omega(\Delta t_1 + |\Delta t_2|) \simeq \omega \left(\frac{2DV^2}{c^3} \right) \\ &\simeq \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{2DV^2}{c^3} = \frac{4\pi D}{\lambda} \frac{V^2}{c^2}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Durant une telle rotation le patron d'interférence observé dans l'axe \overline{DA} devrait changer appréciablement si la terre se déplace à vitesse V dans l'éther. Avec $V = 3 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, vitesse orbitale de la terre, et $\frac{D}{\lambda} = 2 \times 10^6$ on devrait avoir $\Delta\phi = 0.2 \text{ rad}$.

Depuis Michelson et Morley (1887), l'expérience fut reprise avec un degré de précision croissant¹ et on a jamais observé un $\Delta\phi$ mesurable! On doit conclure de cette *expérience négative* que $\Delta\phi = 0$, c'est-à-dire que $V = 0$ où mieux, que l'éther n'existe pas!

1.6 Invariance de la vitesse de la lumière

L'expérience de Michelson et Morley suggère aussi que la vitesse de la lumière est indépendante du mouvement de la source et du récepteur.

Cet invariance de la vitesse de la lumière est plus directement mise en évidence par l'expérience de Sadeh². Le positron et l'électron s'annihilent par l'émission de deux photons (voir figure 1.9)

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma. \quad (1.33)$$

Avec des positrons (émis par Cu^{64}) de vitesse proche de c et dirigés sur des électrons au repos, Sadeh a observé que les deux photons atteignent simultanément des détecteurs équadistants de la cible. Ils ont donc tous les deux la même vitesse.

¹ (Voir La Recherche, édition oct. 79, et Brillet et Hall (Phys.Rev.Lett. 42, 549 (1979)).)

² (Voir Sadeh, Phys.Rev.Lett., 271 (1963).)

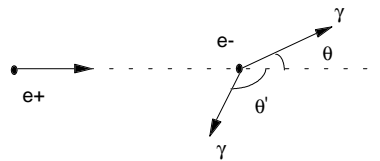


Figure 1.9 Expérience de Sadeh mettant en jeu des collisions $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$, où l'électron est au repos.

La source de ces photons est au centre de masse qui se déplace à la vitesse $\simeq \frac{c}{2}$. Puisqu'un photon est émis dans le sens général de la source et que l'autre est émis dans un sens presque opposé, il est manifeste que l'addition de vitesse de Galilée est ici inapplicable!

L'invariance de c signifie que l'onde sphérique émise par une source lumineuse ponctuelle apparaîtra sphérique à tout observateur d'un autre système inertiel (voir figure 1.10).

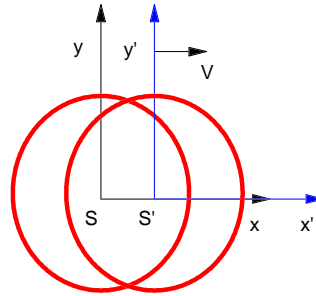


Figure 1.10 Les référentiels S et S' coïncident à l'émission en $t = t' = 0$. Puisque la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels, l'onde paraîtra sphérique quelque soit l'observateur.

1.7 La vitesse ultime

Dans un accélérateur *Van de Graaff*, par exemple, on peut facilement soumettre des électrons à une différence de potentiel de 10^6 volts et leur donner l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} K &= e\phi = 1\text{MeV} = (1.6 \times 10^{-19})(10^{12}) \\ &\simeq 1.6 \times 10^{-13} \text{J}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Un faisceau de N électrons par seconde, ainsi accélérés, délivrera une puissance de $(1.6 \times 10^{-13} N)$ watts dans une cible. Un thermocouple peut mesurer cette puissance. On peut donc déterminer *expérimentalement* l'énergie d'un électrons ainsi accéléré.

Par une mesure de temps de vol on peut aussi mesurer directement la vitesse de ces électrons. Ces mesures conduisent à la courbe de la figure 1.11.

- $K = \frac{1}{2}Mv^2$ ou $v^2 = \frac{2K}{M}$ n'est donc valide que pour $v \ll c$!
- c est la vitesse ultime.

Plusieurs accélérateurs et laboratoires modernes vérifient (implicitement) tous les jours que:

- c est invariant par rapport à tous les repères inertiels
- c est la vitesse maximum possible de toutes communications
- la transformation de Galilée est inadéquate aux grandes vitesses

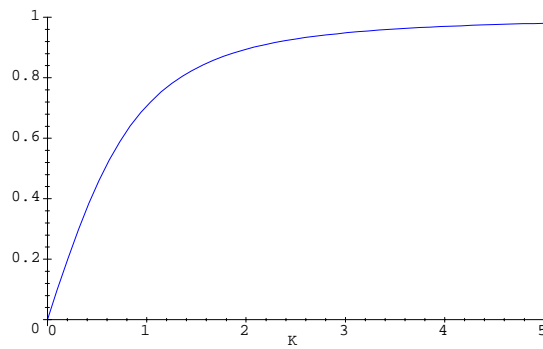


Figure 1.11 Relation entre la vitesse $\beta = v/c$ et l'énergie cinétique K : Ici, posant la masse $M = 1$ et $c = 1$, on peut écrire $v \equiv v(K) = \frac{K}{\sqrt{1+K^2}}$.

- toutes les particules de masse nulle ($\gamma, \nu, \overline{\nu} \dots$) semblent se déplacer à cette vitesse c .



2 PRINCIPES DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

La théorie que l'on appelle relativité restreinte a été élaborée dans un article d'Einstein paru en 1905. Cette théorie n'avait pas pour but d'élucider des phénomènes inexplicables par la mécanique de Newton mais permettait plutôt, à la suite d'une réflexion sur le concept de temps, d'intégrer certains résultats connus de l'électromagnétisme de Maxwell en étendant le principe de relativité de Galilée à cette dernière.

2.1 Les principes fondamentaux

Voici les deux principes sur lesquels repose la relativité:

Postulat 2.1 *Le principe de relativité: les lois de la physique doivent avoir la même forme dans tous les repères inertiels.*

Postulat 2.2 *Universalité de la vitesse de la lumière: la vitesse de la lumière est la même dans tous les repères inertiels. Cette vitesse ne dépend pas de l'état de mouvement de la source.*

Le principe de relativité

Le principe de relativité avait été énoncé par Galilée pour les phénomènes mécaniques. On savait alors qu'il n'était pas possible de détecter la vitesse absolue d'un repère. Ce principe est contenu dans la loi d'addition des vitesses suivantes:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V} \quad (2.1)$$

où \mathbf{V} est la vitesse du repère S' par rapport au repère S .

Les équations de la mécanique de Newton sont *invariantes* sous cette loi de transformation. En effet, comme:

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d(\mathbf{v} - \mathbf{V})}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} \quad (2.2)$$

la forme de la deuxième loi ne change pas, étant entendu que les forces et la masse sont des quantités invariantes, i.e. elles ont la même valeur dans S et dans S' .

Nous allons introduire une notion importante en relativité restreinte, liée à la notion de repère inertiel: celle des observateurs inertiels.

La notion d'observateur:

Cette notion, mal comprise au début, a été la cause de bien des incompréhensions particulièrement de la part des philosophes (par exemple Bergson). Il faut d'abord préciser que l'observateur relativiste ne voit pas les phénomènes au sens habituel du mot voir. Il recueille plutôt des mesures de position et de temps en différents points de son repère. Ceci présuppose que l'on a placé en chaque point du repère une horloge et que cet ensemble d'horloges est synchronisé. Une observation consiste donc à recueillir, pour une chose qui se passe dans ce repère (un *événement*), un ensemble de valeurs pour la position (les coordonnées x, y et z) et une pour le temps (t).

Nous allons supposer que les repères en cause sont inertiels au sens des lois de Newton: le corps sur lequel n'agit aucune force est au repos ou en mouvement rectiligne uniforme.

Pour des raisons de simplicité, nous considérerons dans ce qui va suivre deux repères inertiels S et S' , où S' se déplace à vitesse v par rapport à S , de telle sorte que les axes Ox et Ox' glissent l'un sur l'autre. On suppose également qu'au moment où les origines se confondent, les horloges marquent $t = t' = 0$ (voir figure 2.1).

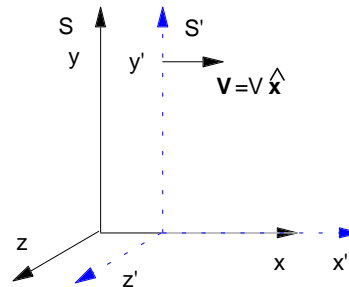


Figure 2.1 Les deux repères inertiels S et S' , où S' se déplace à vitesse v par rapport à S , sont choisis de telle sorte que les axes Ox et Ox' glissent l'un sur l'autre. Au moment où les origines se confondent, les horloges marquent $t = t' = 0$.

Synchronisation des horloges

Synchroniser les horloges d'un repère, c'est faire en sorte que toutes les horloges de ce repère marquent la même heure en même temps. Cela suppose au départ que ces horloges marchent au même rythme, ce sur quoi il n'y a pas d'objection de principe.

Supposons que dans le repère S (ou S'), les horloges sont disposées régulièrement le long de l'axe Ox (ou Ox') et que les observateurs de chaque repère acceptent de considérer comme instant-origine le moment où les points O et O' coïncideront; supposons de

plus qu'un signal lumineux sera émis à cet instant. Nous supposons ici que ce signal servira à déclencher le départ de ces horloges.

Voyons, par exemple, comment l'observateur du repère S' devra préparer ses horloges avant que O et O' coïncident (voir figure 2.2).

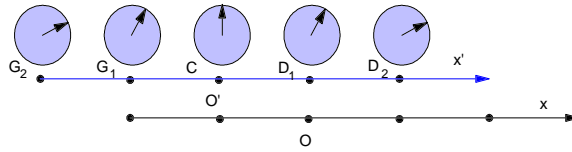


Figure 2.2 Les horloges sont disposées régulièrement le long de l'axe Ox (ou Ox') et les observateurs de chaque repère considèrent comme instant-origine le moment où les points O et O' coïncideront.

Sur chacune des horloges, il place l'aiguille à l'instant où elle devra être au moment du déclenchement par le rayon lumineux c'est-à-dire à l'instant $t' = \frac{L}{c}$; ainsi sur les horloges G_1 et D_1 l'aiguille sera à $t'_1 = \frac{L_1}{c}$, sur les horloges G_2 et D_2 , elle sera à $t'_2 = \frac{L_2}{c}$ et ainsi de suite. L'horloge C , placée à l'origine, est évidemment à $t' = 0$.

Lorsque l'horloge C croisera l'origine O du repère S , le signal lumineux sera émis, et quelques instants après, on observera dans S' que toutes les horloges marquent la même heure, c'est-à-dire qu'elles sont synchronisées (voir figure 2.3).

Comment l'observateur S juge-t-il la synchronisation des horloges du repère S' ? (voir figure 2.4 et 2.5).

La figure 2.4 montre la situation au moment de l'émission du signal lumineux. L'observateur S ne peut faire autrement que constater (voir figure 2.5) que le front L_g (qui va vers la gauche) rencontrera l'horloge G avant que le front d'onde L_d (qui va vers la droite) ne rencontre l'horloge D ; l'horloge G , selon lui, sera déclenchée avant l'horloge D . Les horloges de S' ne seront donc pas synchronisées selon l'observateur du repère S .

Évidemment, pendant que S' préparait ses horloges avant l'instant initial, S faisait la même chose dans son repère si bien que l'observateur S' arrive aussi à la conclusion que les horloges de S ne sont pas synchronisées mais que les siennes le sont.

Tous les deux ont raison et c'est là une des conséquences importantes des postulats de la relativité: la synchronisation est un phénomène relatif. On verra qu'il en découle que la simultanéité de deux événements est aussi quelque chose de relatif.

Universalité de la vitesse de la lumière

Étant donné le caractère fondamental donné à la vitesse de la lumière (c), nous adopterons par la suite la convention que cette vitesse a la valeur 1 (sans dimensions), ce qui revient à dire que nous mesurerons le temps en mètre tout comme les distances. Pour convertir en SI, nous utiliserons les relations suivantes:

$$3 \times 10^8 \text{ms}^{-1} = 1$$

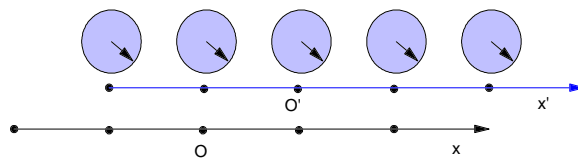


Figure 2.3 Lorsque l'horloge C croise l'origine O du repère S , le signal est émis. Après quelques instants, dans S' , les horloges sont synchronisées.

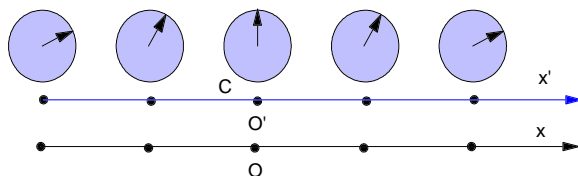


Figure 2.4 Émission d'un signal lumineux.

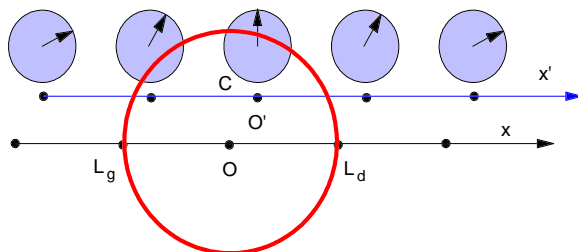


Figure 2.5 Pour l'observateur S , le front L_g (qui va vers la gauche) atteint l'horloge G avant que le front d'onde L_d (qui va vers la droite) ne rencontre l'horloge D ; donc l'horloge G , selon lui, sera déclenchée avant l'horloge D . Les horloges de S' ne paraissent donc pas synchronisées selon l'observateur du repère S .

i.e.

$$1 \text{ s} = 3 \times 10^8 \text{ m}$$

ou encore

$$1 \text{ m} = 0.333.. \times 10^{-8} \text{ s}.$$

On peut vérifier, par exemple, que la vitesse n'ayant pas de dimensions, on mesurera l'énergie et l'impulsion en kg et l'accélération en m^{-1} , etc.

2.2 Relativité et géométrie: les diagrammes espace-temps

Il est essentiel d'être à l'aise avec la géométrie de la relativité restreinte. Dessinés sur un plan, ces diagrammes n'auront que deux dimensions (x et t) (voir figure 2.6).

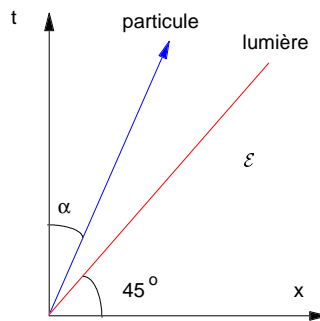


Figure 2.6 Diagramme espace-temps et lignes d'univers.

Vocabulaire:

- a) *événement* \mathcal{E} : un point de cet espace;
- b) *Ligne d'univers de la lumière*: elle est à 45° ;
- c) *Ligne d'univers d'une particule*: celle-ci ayant une vitesse $v \leq 1$ (comme nous le verrons plus loin), sa ligne d'univers fait un angle plus petit que 45° avec l'axe t .

Notation:

- a) Les lettres cursives (\mathcal{E} , \mathcal{R} , \mathcal{P} , etc.) seront utilisées pour désigner les événements;
- b) Les coordonnées seront appelées t, x, y et z . Cependant, dans des expressions plus formelles, on emploiera par exemple, la notation x_μ où μ prend les valeurs 0, 1, 2 et 3. Ainsi $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ et $x^3 = z$. Les valeurs 0, 1, 2 et 3 ne sont pas des exposants mais des indices.

Dans certains cas, on pourra utiliser la notation x^i où i prendra les valeurs 1, 2 et 3. On aura donc: $x^1 = x$, $x^2 = y$ et $x^3 = z$.

**Remarque 2**

En résumé, les indices grecs μ, ν, ρ, \dots etc., prennent les valeurs 0, 1, 2 et 3 tandis que les indices latins i, j, k, \dots etc., prennent les valeurs 1, 2 et 3.

Système de coordonnées d'un autre observateur

Nous venons de voir comment on peut représenter des événements pour l'observateur du repère S . Qu'en est-il pour un observateur dans un repère S' se déplaçant à vitesse V par rapport à S ? Nous allons essayer de représenter sur un même diagramme les deux points de vue (voir figure 2.7).

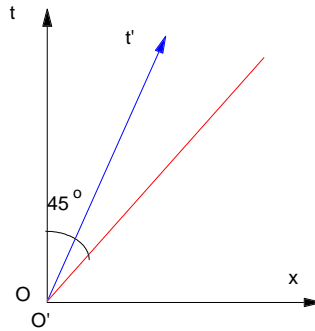


Figure 2.7 Système de coordonnées S' sur un diagramme d'espace temps: l'axe-temps de S' (i.e. $O't'$) correspond à la ligne d'univers de l'origine du repère S' tel que vu dans S .

- *L'axe-temps de S'* (i.e. $O't'$): Cet axe est le lieu des points pour lesquels $x' = 0$ i.e. la ligne d'univers de l'origine du repère S' tel que vu dans S . C'est donc une droite qui fait avec l'axe Ot un angle inférieur à 45° .
- *L'axe-espace de S'* (i.e. $O'x'$): C'est le lieu des événements, dans le repère S' , qui sont simultanés avec l'événement-origine (rencontre de O et O'). Pour trouver ce lieu, nous aurons recours à une construction géométrique faisant intervenir les principes énoncés plus haut. Plaçons-nous dans S' et supposons qu'un rayon lumineux a été émis au point O' , à l'instant $t' = -a$ (événement \mathcal{E}). On suppose que le rayon est réfléchi en $x' = a$ (événement \mathcal{R}) et qu'il repasse par l'origine à l'instant $t' = +a$ (événement \mathcal{P}), la valeur a étant arbitraire (voir figure 2.8).

Reprenons le diagramme initial et essayons d'y placer les événements \mathcal{E} , \mathcal{R} et \mathcal{P} . \mathcal{E} et \mathcal{P} correspondent à $t' = \pm a$ sur l'axe des t' . Il est facile dans un premier temps de placer l'événement \mathcal{R} , on trace des droites à 45° représentant des rayons lumineux. L'intersection de ces droites nous donne \mathcal{R} . Il suffit de tracer une droite passant par ce point et par l'origine, pour avoir l'axe Ox' . La géométrie nous montre que cet axe Ox' est disposé symétriquement par rapport à la droite-lumière (voir figure 2.9). Il est important de remarquer que nous n'avons pas encore introduit de calibration sur les axes; cela

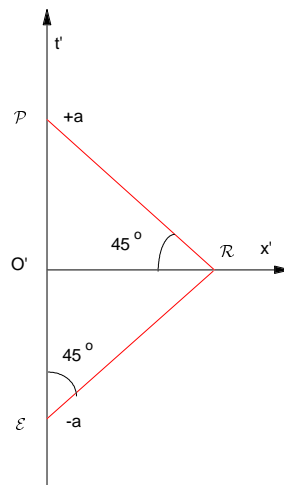


Figure 2.8 Trajet des rayons lumineux dans S' .

viendra plus loin.

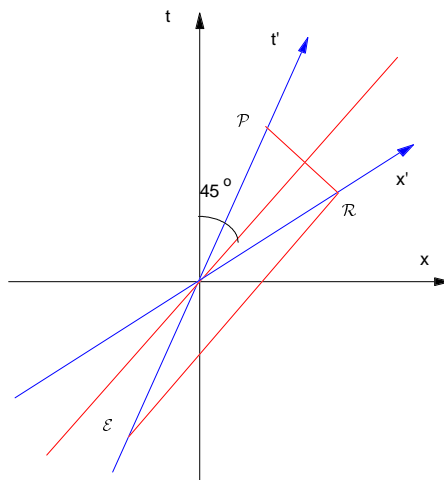


Figure 2.9 Trajet des rayons lumineux dans un diagramme espace-temps.

On voit aisément, par exemple, que deux événements simultanés dans un repère ne le sont pas dans l'autre (voir figure 2.10). Dans S , de tels événements sont sur une droite parallèle à l'axe Ox , donc perpendiculaire à l'axe Ot . Par contre dans S' , les projections de ces événements sur l'axe Ot' montrent des instants différents (les projections se font toujours parallèlement aux axes). Cette simultanéité relative vient du fait que la vitesse de la lumière a une grandeur finie. Cela avait échappé à Newton et à ses successeurs. En faisant du temps une quantité absolue, Newton supposait implicitement une synchronisation des horloges à l'aide d'un signal de vitesse infinie.

Les diagrammes suivants représentent la même situation physique. À la figure 2.11, on a la représentation de S' dont la vitesse est V vers la droite le long de Ox tandis qu'à la figure 2.12, on a la représentation telle que vue dans S' pour qui S se déplace avec une vitesse V vers la gauche.

2.3 L'intervalle et son invariance

Considérons deux événements \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 reliés par un rayon lumineux (voir figure 2.13).

Dans S , on a $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ et $\Delta z = z_2 - z_1$.

Ces quantités satisfont la relation

$$-(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = 0 \quad (2.3)$$

en raison du fait que nous avons posé $c = 1$. En raison de l'universalité de c , on a aussi

$$-(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 = 0. \quad (2.4)$$

Nous allons maintenant introduire une des notions les plus fondamentales de la relativité

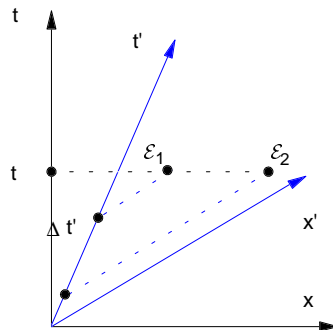


Figure 2.10 Deux événements simultanés dans S ne le sont pas dans S' .

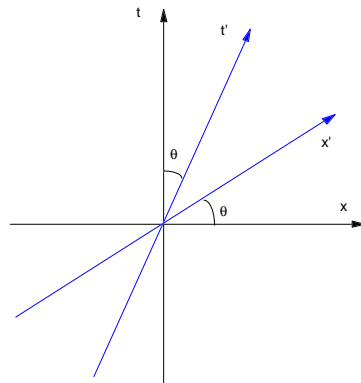


Figure 2.11 Représentation de S' ayant une vitesse V vers la droite le long de Ox .

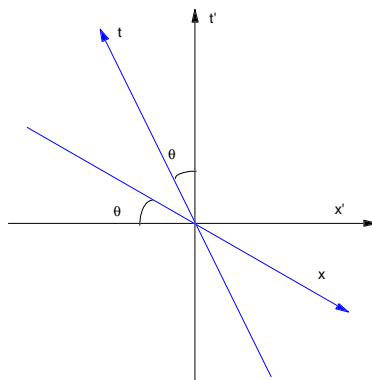


Figure 2.12 Représentation telle que vue dans S' pour qui S se déplace avec une vitesse V vers la gauche.

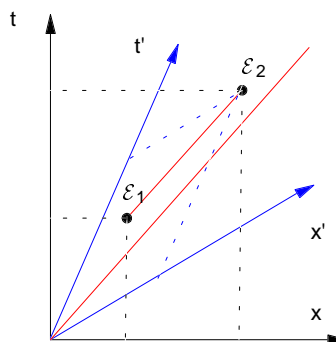


Figure 2.13 Diagrammes espace-temps pour deux événements \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 reliés par un rayon lumineux.

restreinte: l'intervalle.

Supposons deux événements quelconques séparés dans l'espace de Δx , Δy et Δz et dans le temps de Δt . On appelle intervalle entre ces événements la quantité

$$\Delta s^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \quad (2.5)$$

En relation avec ce que l'on vient tout juste de voir, on constate que si Δs^2 est nul pour deux événements donnés, $\Delta s'^2$ est également nul. Qu'en est-il pour deux événements quelconques?

En géométrie tridimensionnelle, la quantité

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \quad (2.6)$$

est appelée distance entre deux points. Cette quantité conserve sa valeur lors d'une rotation du système de coordonnées, c'est-à-dire que dans le nouveau repère

$$(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \quad (2.7)$$

Voyant dans la définition de l'intervalle une analogie avec celle de la distance en $3D$, nous allons accepter qu'il y a une invariance de l'intervalle lors d'un passage des coordonnées de $S(t, x, y, z)$ aux coordonnées de $S'(t', x', y', z')$:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2. \quad (2.8)$$

Ce qui suit est une démonstration importante de l'invariance de l'intervalle, i.e. de la dernière équation. On peut admettre que les relations mathématiques entre les coordonnées du repère S' et celles du repère S sont des relations linéaires. En effet, cela revient à admettre qu'il n'y a pas de déformation de l'espace selon la distance à l'origine ni de déformation du temps selon l'endroit où on se trouve dans le repère. (Dans le cas contraire, il faudrait faire appel à la relativité générale.)

Ainsi les quantités t' , x' , y' et z' sont des combinaisons linéaires des quantités t , x , y et z et l'on peut écrire:

$$(\Delta s')^2 = -(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 \quad (2.9)$$

$$= \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 M_{\alpha\beta} (\Delta x^\alpha) (\Delta x^\beta) \quad (2.10)$$

où α et β prennent les valeurs 0, 1, 2, 3; les coefficients $M_{\alpha\beta}$ peuvent être des fonctions de \mathbf{v} , la vitesse relative des deux repères. On peut supposer que $M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}$ pour tout α ou β (sauf pour $\alpha = \beta$) étant donné que seules les sommes $M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha}$ apparaissent dans l'équation (2.9)

Supposons maintenant que $(\Delta s)^2 = 0$, ce qui nous permet d'écrire à partir de (2.3),

$$\begin{aligned} \Delta t &= \Delta r \\ \Delta r &= \left[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

quantités que l'on substitue dans l'équation (2.9) d'où:

$$(\Delta s')^2 = M_{00} (\Delta r)^2 + 2 \sum_{i=1}^3 M_{0i} (\Delta x^i) \Delta r$$

$$+ \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 M_{ij} (\Delta x^i) (\Delta x^j). \quad (2.12)$$

Nous avons vu que $(\Delta s')^2 = 0$ lorsque $(\Delta s)^2 = 0$; cela doit être vrai pour des valeurs arbitraires de Δx^i , ce qui entraîne:

$$M_{0i} = 0; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.13)$$

et

$$M_{ij} = -M_{00} \delta_{ij}; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.14)$$

où δ_{ij} est le delta de Kronecker, ainsi défini:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}. \quad (2.15)$$

L'équation (2.9) peut donc s'écrire:

$$(\Delta s')^2 = M_{00} [(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2]. \quad (2.16)$$

Si nous définissons une fonction

$$\varphi(\mathbf{v}) = -M_{00} \quad (2.17)$$

nous arrivons au résultat suivant: *l'universalité de la vitesse de la lumière implique que les intervalles $(\Delta s)^2$ et $(\Delta s')^2$ entre deux événements satisfont la relation:*

$$(\Delta s')^2 = \varphi(\mathbf{v}) (\Delta s)^2 \quad (2.18)$$

Il nous reste à montrer que $\varphi(\mathbf{v}) = 1$.

Considérons une règle placée perpendiculairement à l'axe Ox , dans S avec le talon à l'origine. Cette règle sera donc perpendiculaire à l'axe Ox' et à la vitesse du repère S' par rapport à S , étant donné notre convention, depuis le début, de faire glisser les axes Ox et Ox' l'un sur l'autre. Nous supposons que cette règle coïncide avec l'axe Oy , ce qui n'enlève rien à la généralité de la démonstration.

Supposons que l'observateur de S' a aussi une règle semblable disposée le long de Oy' et qu'il a attaché un pinceau à la marque de 1 m, pour fixer les idées. Faisant l'hypothèse que la règle en mouvement de S' est plus courte, l'observateur de S s'attend donc à voir la trace du pinceau à 0.99 m, disons. Que pense S' ? Il voit venir vers lui une règle de S ; elle doit donc être plus courte donc il s'attend à laisser sa trace à 1.01 m.

Il est bien entendu que cette trace ne peut se faire à deux endroits en même temps et la seule conclusion que l'on peut tirer c'est que les distances perpendiculaires à la vitesse \mathbf{v} sont les mêmes pour les deux observateurs. Donc,

$$(\Delta y)^2 = (\Delta y')^2 \quad (2.19)$$

$$(\Delta z)^2 = (\Delta z')^2 \quad (2.20)$$

d'où $\varphi(\mathbf{v}) = 1$ et alors:

$$(\Delta s')^2 = (\Delta s)^2. \quad (2.21)$$

Pour résumer: Dans la direction y et z , il n'y a aucun mouvement relatif donc les distances le long de ces axes ne sont pas affectées.

2.4 Classification des événements

Comme la quantité $(\Delta s)^2$ entre deux événements est indépendante des observateurs, on peut s'en servir pour classer les événements l'un par rapport à l'autre.

Si l'intervalle entre deux événements (\mathcal{E} et \mathcal{S}) est positif, on dira qu'il est du *genre-espace*; si l'intervalle est négatif (\mathcal{E} et \mathcal{T}), on dira qu'il est du *genre-temps* alors que s'il est nul, on le dira du *genre-lumière*. Par rapport à un événement donné \mathcal{E} , l'ensemble des événements contenus dans le cône inférieur forment le *passé absolu* de \mathcal{E} ; ceux du cône supérieur, le *futur absolu* de \mathcal{E} (événements du *genre-temps*). Ceux qui sont à l'extérieur du cône constituent l'*ailleurs* de \mathcal{E} (événements du *genre-espace*) (voir figure 2.14).

$$(\Delta s)^2 > 0 \quad ; \quad \text{genre - espace}$$

$$(\Delta s)^2 < 0 \quad ; \quad \text{genre - temps}$$

$$(\Delta s)^2 = 0 \quad ; \quad \text{genre - lumière}$$

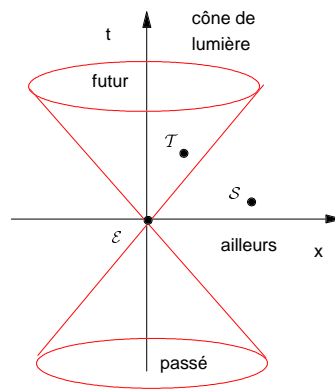


Figure 2.14 L'ensemble des événements contenus dans le cône inférieur forment le passé absolu de \mathcal{E} ; ceux du cône supérieur, le futur absolu de \mathcal{E} (événements du genre-temps). Les événements à l'extérieur du cône constituent l'ailleurs de \mathcal{E} (événements du genre-espace).

On voit donc que chaque événement a son passé, son futur et son ailleurs. Quant au présent, il n'existe à toutes fins pratiques qu'en un point.

Cette façon de voir est radicalement différente de celle qui avait prévalu jusqu'en 1905 où le temps était quelque chose d'absolu.

Relation de causalité

On peut aisément admettre que l'événement \mathcal{S} de la figure 2.14 ne peut être l'effet de l'événement \mathcal{E} car la distance (selon Ox) est trop grande pour qu'un rayon lumineux ait pu connecter ces deux événements. Il en est de même pour tous les événements de l'ailleurs de \mathcal{E} ; ainsi l'événement \mathcal{E} ne peut être l'effet d'aucun événement situé dans l'ailleurs-passé.

Par contre, une relation de causalité est possible entre \mathcal{E} et \mathcal{T} qui est dans le *futur absolu* de \mathcal{E} . En effet, il est possible qu'un rayon lumineux ou qu'un signal moins rapide ait connecté ces deux événements, ce qui veut dire que \mathcal{E} pourrait être la cause de \mathcal{T} . De même \mathcal{E} peut être l'effet de tout événement faisant partie de son passé absolu.

2.5 Limites de la relativité restreinte

Il est bon de rappeler les limites dans lesquelles nous travaillons ici, i.e. les limites d'application de la relativité restreinte:

Les systèmes considérés sont des systèmes inertiels. On parle donc ici de systèmes qui ont des vitesses rectilignes uniformes donc absence de toute accélération.

La gravitation est nulle ou négligeable. La métrique (de Minkowski) est donc plate. Dans le cas contraire, nous aurions à introduire une métrique courbe et devrions passer à la relativité générale pour traiter le problème.

Les masses et énergies totales sont réelles et positives. Nous ne considérons pas d'objets exotiques comme des tachyons.

Dans la limite où les vitesses sont petites par rapport à c , les effets relativistes peuvent être négligés à la faveur de la mécanique de Newton.

2.6 Une nouvelle cinématique

Nous allons pousser un peu plus loin notre analyse des conséquences des deux principes de la relativité restreinte en étudiant de façon plus détaillée la géométrie quadrimensionnelle qui découle de l'invariance de l'intervalle. Pour des raisons de simplicité, nous resterons dans le plan qui contient les axes x et t .

Calibration des axes

L'équation

$$-t^2 + x^2 = 1$$

(voir figure 2.15) donne deux branches d'hyperboles (h_1 et h_2) qui sont les lieux d'événements de *genre-espace* par rapport à l'événement \mathcal{O} (l'origine). $(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2 = 1$ pour tous ces événements.

D'autre part, $-t^2 + x^2 = -1$ donne deux branches d'hyperbole (h_3 et h_4) qui sont les lieux d'événements du *genre-temps* par rapport à \mathcal{O} et pour lesquels $(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2 = -1$. On remarque que toutes ces hyperboles sont asymptotiques aux droites de pente ± 1 , i.e. des droites-lumières.

Prenons l'hyperbole h_3 dont l'équation s'écrit $-t^2 + x^2 = -1 = -t'^2 + x'^2$. Pour $x = 0$, l'intersection avec l'axe temps Ot nous donne l'événement qui survient à l'origine après une durée de 1 m (temps) (voir figure 2.16). De même, sur cette hyperbole, l'intersection avec l'axe $O't'$ ($O't'$) nous donne l'événement qui survient à l'origine après une durée de 1' m.

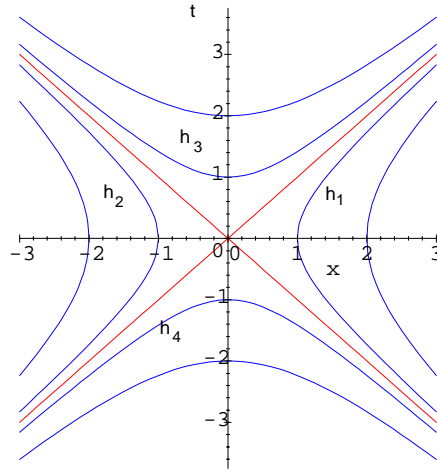


Figure 2.15 Calibration des axes: Les deux branches d'hyperboles (h_1 et h_2) correspondent à des événements de genre-espace par rapport à l'événement \mathcal{O} (l'origine) alors que Les deux branches d'hyperboles (h_3 et h_4) correspondent à des événements de genre-temps.

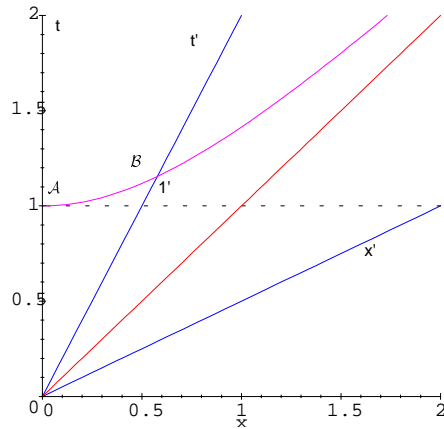


Figure 2.16 Durée de temps de 1 m dans les deux systèmes S et S' .

Si l'on fait la projection du dernier événement (soit \mathcal{B}) sur l'axe Ot (soit \mathcal{A}), on remarque que la distance $O\mathcal{A}$ est supérieure à 1, ce qui signifie que les durées qui s'écoulent sur les horloges de S' sont plus longues lorsque mesurées dans S . C'est ce qu'on appelle la dilatation du temps ou encore le ralentissement des horloges. Ce phénomène, prévu par la relativité restreinte, a été observé avec grande précision.



3 TRANSFORMATIONS DE LORENTZ

3.1 Transformations de Lorentz

Rappelons les deux postulats de la relativité restreinte:

Postulat 3.1 *Le principe de relativité: les lois de la physique doivent avoir la même forme dans tous les repères inertiels.*

Postulat 3.2 *Universalité de la vitesse de la lumière: la vitesse de la lumière est la même dans tous les repères inertiels. Cette vitesse ne dépend pas de l'état de mouvement de la source.*

Toutes les conséquences de la théorie de la relativité restreinte découlent de cette seule nouvelle hypothèse.

Dans certains cas nous aurons recours à une troisième donnée (que nous appellerons le 3^e *postulat* ici par abus de langage) lorsque le cas le justifie, i.e. lorsqu'il y a invariance de translation et de rotation:

Postulat 3.3 *L'espace physique est homogène et isotrope*

(Cette condition implique l'invariance du système sous une translation et une rotation, i.e. la conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique)

Mais la transformation de Galilée doit être corrigée. L'invariance de la vitesse signifie notamment qu'un front d'onde émanant d'une source lumineuse ponctuelle demeure sphérique dans tous les repères en mouvement relatif uniforme (voir figure 3.1). Il est impossible de déterminer l'état du mouvement de la source par la forme du front d'onde.

Nous voulons trouver une nouvelle transformation des coordonnées à partir de cette géométrie imposée par l'invariance de c .

Soit des repères S et S' en mouvement relatif uniforme. Un front d'onde émis en $t = 0$, par une source fixe à l'origine de S , sera décrit en $t > 0$ par un observateur du même repère par la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2. \quad (3.1)$$

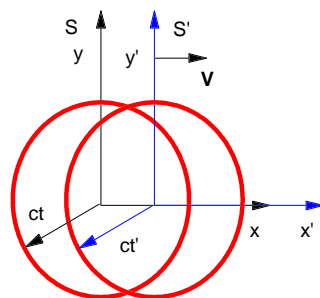


Figure 3.1 Front d'onde dans deux référentiels S et S' .

Un observateur d'un repère S' , qui coïncidait avec S à $t = 0$ mais qui se déplace uniformément par rapport à S , verra la sphère

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = t'^2. \quad (3.2)$$

Si la vitesse de S' par rapport à S est $\mathbf{V} = V \hat{\mathbf{x}}$, la transformation de Galilée

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \quad (3.3)$$

transforme la sphère de S' en

$$x^2 - 2xVt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = t^2 \quad (3.4)$$

Un résultat qui ne reproduit pas la sphère de S ! La transformation de Galilée n'est pas compatible avec l'invariance de c , mais ce résultat peut nous aider à en trouver une autre qui

1. se réduit à celle de Galilée pour $V \rightarrow 0$,
2. transforme $x'^2 + y'^2 + z'^2 = t'^2$ en $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$.

On observe par ailleurs:

1. qu'on devrait avoir $y' = y$, $z' = z$, puisque $\mathbf{V} = V \hat{\mathbf{x}}$,
2. que les sphères se dilatent à taux constant, alors x' et t' doivent dépendre linéairement de x et t ,
3. qu'on ne peut avoir $t' = t$ si l'on veut faire disparaître les termes $-2xVt + V^2t^2$ obtenus plus haut.

Essayons la transformation

$$\begin{aligned} t' &= t + fx \\ x' &= x - Vt \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Alors, $x'^2 + y'^2 + z'^2 = t'^2$ devient :

$$x^2 - \underline{2xVt} + \underline{V^2t^2} + y^2 + z^2 = t^2 + \underline{2ftx} + f^2x^2. \quad (3.6)$$

Les termes soulignés s'annulent si $f = -V$ et il reste

$$x^2(1 - V^2) + y^2 + z^2 = t^2(1 - V^2). \quad (3.7)$$

On constate qu'on obtient la sphère désirée en divisant $x' = x - Vt$ et $t' = t + fx = t - Vx$ par $\sqrt{1 - V^2}$. On obtient donc ainsi la transformation de Lorentz :

$$t' = \frac{t - Vx}{\sqrt{1 - V^2}}$$

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}} \\
y' &= y \\
z' &= z.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Pour $V \rightarrow 0$ cette transformation se réduit à celle de Galilée. Si S' s'approche plutôt que de s'éloigner on remplace V par $-V$.

La propagation de la lumière, onde électromagnétique, est une conséquence des équations (de Maxwell) de la théorie électromagnétique. L'invariance de la vitesse de la lumière doit donc jouer un rôle fondamental dans cette théorie. En fait, Einstein avait noté l'incompatibilité des équations de Maxwell et des transformations de Galilée.

En terme de $\beta \equiv \frac{V}{c} = V$ et $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 - V^2)^{-\frac{1}{2}}$ on a

$$\begin{aligned}
t' &= \gamma(t - Vx) \\
x' &= \gamma(x - Vt) \\
y' &= y \\
z' &= z.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

En langage matriciel, on écrit

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V & 0 & 0 \\ -\gamma V & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

(Cette matrice est analogue à une *matrice de rotation* d'angle ψ dans le *plan* (x, t) avec ψ tel que $\sinh \psi = \gamma\beta$ et $\cosh \psi = \gamma$).

3.2 Addition de vitesses

On veut relier les vitesses \mathbf{v} et \mathbf{v}' d'une particule telles qu'observées dans S et S' si S' se déplace à vitesse uniforme $\mathbf{V} = V \hat{\mathbf{x}}$ par rapport à S (voir figure 3.2).

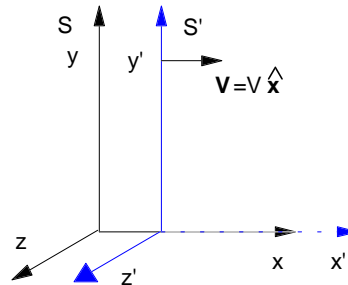


Figure 3.2 Addition de vitesse ou observation de vitesse dans des référentiels S et S' .

On a

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma V \\ \gamma V & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

c'est-à-dire

$$x = \gamma(x' + Vt') \quad (3.12)$$

$$t = \gamma(t' + Vx'). \quad (3.13)$$

Alors

$$dx = \frac{\partial x}{\partial x'} dx' + \frac{\partial x}{\partial t'} dt' = \gamma dx' + \gamma V dt' \quad (3.14)$$

$$dt = \frac{\partial t}{\partial t'} dt' + \frac{\partial t}{\partial x'} dx' = \gamma dt' + \gamma V dx' \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma dx' + \gamma V dt'}{\gamma dt' + \gamma V dx'} \\ &= \frac{\frac{dx'}{dt'} + V}{1 + V \frac{dx'}{dt'}} = \frac{v'_x + V}{1 + V v'_x}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Pour les autres composantes de \mathbf{v} : $dy = dy'$ et donc

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma dt' + \gamma V dx'} \\ &= \frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma(1 + V \frac{dx'}{dt'})} = \frac{v'_y}{\gamma(1 + V v'_x)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Pour $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V} \\ v_y &= \frac{v'_y}{\gamma(1 + v'_x V)} \\ v_z &= \frac{v'_z}{\gamma(1 + v'_x V)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

C'est la transformation de vitesse qui s'impose suite à notre hypothèse d'invariance de c et de la transformation de Lorentz qui en découle. Pour $V \rightarrow 0$ on retrouve la transformation de vitesse de Galilée : $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$ si $V \ll 1$.

La transformation inverse s'écrit

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - V}{1 - v_x V} \\ v'_y &= \frac{v_y}{\gamma(1 - v_x V)} \\ v'_z &= \frac{v_z}{\gamma(1 - v_x V)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.3 Exemples d'addition de vitesses

**Exemple 3.1**

Si la particule est un photon dont la vitesse dans S' est

$$v'_x = c = 1, \quad v'_y = v'_z = 0. \quad (3.20)$$

Sa vitesse dans S est

$$v_x = \frac{1+V}{1+V} = 1, \quad v_y = v_z = 0. \quad (3.21)$$

**Exemple 3.2**

Pour un photon dont la vitesse dans S serait dans la directions des y i.e. $v_y = c$ (voir figure 3.3):

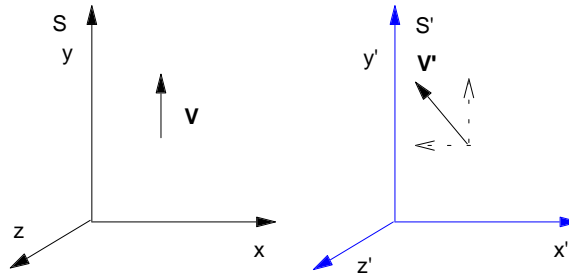


Figure 3.3 Vitesse dans la direction des y , avec mouvement relatif dans la directions des x .

$$v_x = 0, \quad v_y = c, \quad v_z = 0. \quad (3.22)$$

On obtient dans S' :

$$v'_x = -V \quad (3.23)$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1-0)} = (1-V^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.24)$$

$$\text{et } v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z = c^2 = 1.$$

**Exemple 3.3**

Soit deux particules de vitesse égale et opposée dans S' :

$$v'_{x1} = 0.9, \quad v'_{x2} = -0.9. \quad (3.25)$$

Calculer la vitesse de la première dans le repère où la seconde est au repos. Il faut prendre S tel que $\mathbf{V} = 0.9\hat{\mathbf{x}} = -v'_{x2}\hat{\mathbf{x}}$. Alors

$$v_{x1} = \frac{v'_{x1} + V}{1 + v'_{x1}V} = \frac{(0.9 + 0.9)}{1 + (0.9)^2} \quad (3.26)$$

$$\simeq 0.9945 < c = 1! \quad (3.27)$$

3.4 Contraction de l'espace

Soit $L_0 \equiv x_2 - x_1$, la longueur d'une tige au repos dans S (aussi appelée *longueur propre*). On mesure la longueur de cette tige dans S' , en mouvement uniforme à vitesse $\mathbf{V} = V \hat{\mathbf{x}}$ par rapport à S , en déterminant simultanément les positions $x'_1(t')$ et $x'_2(t')$ de ses extrémités (voir figure 3.4). La définition naturelle de sa longueur dans S' est :

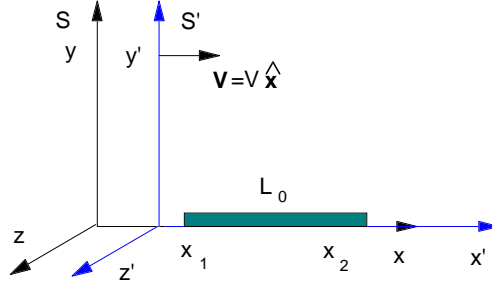


Figure 3.4 Contraction des longueurs: On mesure la longueur de cette tige dans S' , en mouvement uniforme à vitesse $\mathbf{V} = V \hat{\mathbf{x}}$ par rapport à S , en déterminant simultanément les positions $x'_1(t')$ et $x'_2(t')$ de ses extrémités

$$L \equiv x'_2(t') - x'_1(t') \quad (3.28)$$

mais $x_2 = \gamma(x'_2(t') + Vt')$ et $x_1 = \gamma(x'_1(t') + Vt')$ et donc

$$L_0 = x_2 - x_1 = \gamma(x'_2(t') - x'_1(t')) = \gamma L \quad (3.29)$$

ce qui mène à:

$$L = \frac{1}{\gamma} L_0 = \sqrt{1 - V^2} L_0. \quad (3.30)$$

C'est la contraction de *Lorentz-Fitzgerald* d'une tige en mouvement longitudinal. Si la tige est placée transversalement à la direction du mouvement relatif on trouve $L' = L_0$.

Il existe une autre façon de définir et de mesurer la longueur de la tige dans S' . Deux rayons lumineux parallèles sont émis simultanément des extrémités de la tige dans S au temps t (voir figure 3.5). Des détecteurs fixes dans S' et de coordonnées x'_1 et x'_2 reçoivent ces rayons. On a en ce cas

$$x'_1 = \gamma(x_1 - Vt) \quad (3.31)$$

$$x'_2 = \gamma(x_2 - Vt) \quad (3.32)$$

et la différence entre les deux positions devient

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) \quad (3.33)$$

ce qui correspond à

$$L^* = \gamma L_0. \quad (3.34)$$

Ce désaccord n'est qu'apparent, il provient de deux définitions distinctes de la longueur dans S' . Les deux expériences sont différentes, la première compare $\Delta x'$ à $\Delta t' = 0$ et

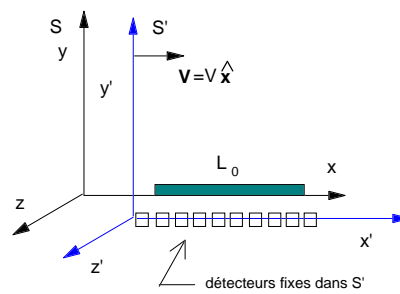


Figure 3.5 Contraction des longueurs: Deux rayons lumineux parallèles sont émis simultanément des extrémités de la tige dans S' au temps t .

la seconde compare les mêmes intervalles à $\Delta t = 0$.

\Rightarrow Deux événements simultanés dans S ne le sont pas dans S'

Pour deux événements simultanés ($\Delta t = 0$) et séparés de Δx dans S on a, dans S' :

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad t' = \gamma(t - Vx) \quad (3.35)$$

et donc si $\Delta t = 0$

$$\Delta x' = \gamma \Delta x \quad (3.36)$$

$$\Delta t' = -\gamma V \Delta x \neq 0. \quad (3.37)$$

3.5 Dilatation du temps

On appelle *temps propre* (τ) le temps mesuré dans le système de référence S où l'horloge est au repos. Si l'horloge est à l'origine $x = 0$ de S , la transformation de Lorentz

$$t' = \gamma(\tau - v(x = 0)) = \gamma\tau = \frac{\tau}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (3.38)$$

prédit un temps t' dilaté pour l'observateur de S' en mouvement relatif uniforme par rapport à l'horloge.

\Rightarrow Les horloges en mouvement semblent avancer plus lentement que les horloges au repos : elles mesurent des intervalles de temps dilatés ou allongés : $\Delta t' > \Delta \tau$.

\Rightarrow L'horloge en mouvement à la vitesse de la lumière (en autant que cela soit possible) semblent arrêtée.

Exemple 3.4



Temps de vie des pions³:

$$\pi \rightarrow \mu^+ + \nu, \quad \begin{matrix} m_{\pi^+} \simeq 273m_e \\ m_{\mu^+} \simeq 215m_e \end{matrix} \quad (3.39)$$

Dans un repère de pions au repos ($v_\pi = 0$) la durée de vie moyenne (demi-vie) des pions est

$$\tau_\pi \simeq 2.5 \times 10^{-8} \text{ s} = 7.5 \text{ m}. \quad (3.40)$$

Dans un faisceau de pions de vitesse $v_\pi = 0.9$, leur vie moyenne est de

$$t' = \frac{2.5 \times 10^{-8}}{\sqrt{1 - (0.9)^2}} \simeq 5.7 \times 10^{-8} \text{ s} \quad (3.41)$$

et donc les π^+ parcourent une distance 2 fois plus longue qu'on pourrait le déduire de manière Galiléenne (non-relativiste).

Cette dilatation du temps ne comporte pas de *mystère* autre que celui de l'invariance de la vitesse de la lumière.

Considérons une impulsion lumineuse réfléchie par un miroir (voir figure 3.6). Si la source et le miroir sont fixes dans S , le temps de parcours est $\tau = \frac{2L}{c} = 2L$. Une horloge fixe dans S' , en mouvement uniforme par rapport à S , mesure, pour la même réflexion, un temps plus grand parce que dans S' la distance à parcourir est plus longue:

³ Voir dans Phys. Rev. 88, 179 (1952).

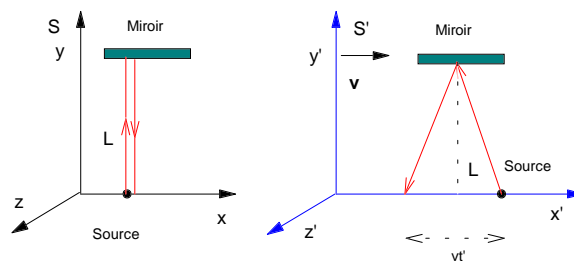


Figure 3.6 Une impulsion lumineuse réfléchie par un miroir telle qu'observée dans les référentiels S et S' .

$$2\sqrt{L^2 + \left(\frac{Vt'}{2}\right)^2} = t'. \quad (3.42)$$

Élevant au carré on récrit:

$$t'^2 = 4L^2 + V^2 t'^2 \quad (3.43)$$

d'où on tire facilement

$$t' = \frac{2L}{\sqrt{1 - V^2}} = \gamma\tau. \quad (3.44)$$

Donc rien de mystérieux dans la construction des horloges !

Une vérification expérimentale

En 1971, une vérification expérimentale directe de la dilatation du temps fut effectuée. Deux avions abord desquels avaient été placées de horloge atomique au césium pendant leurs vols commerciaux réguliers (l'un vers l'est, l'autre vers l'ouest) comparèrent leur horloge à une troisième horloge au sol (voir figure 3.7).

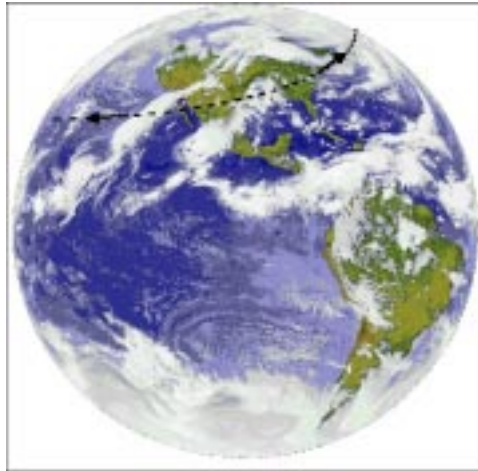


Figure 3.7 Deux avions abord desquels avaient été placées de horloge atomique au césium pendant leurs vols commerciaux réguliers (l'un vers l'est, l'autre vers l'ouest).

L'avion volant vers l'est perdit 59 ns alors que l'avion volant vers l'ouest gagna 273 ns. Deux effets sont présents ici: Les horloges qui bougent ralentissent mais un effet de relativité générale accélère plutôt les horloges. Quoiqu'il en soit on mesura une différence de

$$\Delta = t_E - t_O = (-59) - (+273) = -332 \text{ ns} \pm 15 \text{ ns}.$$

entre les deux horloges laquelle est moins sensible à un effet de relativité générale.

Analysons l'expérience en supposant que tous les référentiels considérés sont inertiels. Considérons trois repères inertiels, un situé au pôle nord, un sur terre et un dans l'avion. Les intervalles de temps, t_N , t_T et t_A respectivement, sont reliés entre-eux par

$$\begin{aligned} t_N &= \gamma_T t_T \\ &= \gamma_A t_A \end{aligned}$$

où $\gamma_T = (1 - v_T^2)^{\frac{1}{2}}$ et $\gamma_A = (1 - v_A^2)^{\frac{1}{2}}$. Les repères sur terre et dans l'avion ont donc des vitesses relatives de v_T et v_A par rapport au pôle nord. Les temps en avion et sur terre sont donc reliés par

$$t_A = \frac{\gamma_T}{\gamma_A} t_T = t_T \left(\frac{1 - v_T^2}{1 - v_A^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Puisque v_T et v_A sont petit par rapport à $c = 1$, on peut écrire

$$t_A \simeq t_T \left(1 + \frac{v_T^2 - v_A^2}{2} \right)$$

ou la différence entre les deux horloges est

$$t_{AT} = t_A - t_T \simeq t_T \left(\frac{v_T^2 - v_A^2}{2} \right)$$

Supposons pour simplifier que les deux avions ci-haut ont des vitesses de croisière constantes par rapport au sol v_C . La vitesse de chaque avion (non-relativiste) est donc

$$v_A = v_T \pm v_C$$

suivant qu'il va vers l'est et l'ouest respectivement.. Alors

$$\begin{aligned} \Delta &= t_E - t_O \\ &\simeq t_T \left(\frac{v_T^2 - (v_T + v_C)^2}{2} \right) - t_T \left(\frac{v_T^2 - (v_T - v_C)^2}{2} \right) \\ &\simeq -2t_T v_T v_C = -2t_T \left(\frac{v_T v_C}{c^2} \right) \end{aligned}$$

ce qui est en accord avec le signe du résultat expérimental. Les expérimentateurs ont pu utiliser les vitesses exactes enregistrés par les avions pour leurs calculs. Il est toutefois possible d'estimer Δ en posant une vitesse de croisière v_C

$$v_C = \frac{2\pi r}{t_T}$$

où r est le rayon de l'orbite de l'avion par rapport à l'axe de rotation de la terre (et de l'avion), i.e. le parcours relativement au repère terrestre. De la même façon, la vitesse du repère sur la terre est de

$$v_T = \frac{2\pi r}{t_{jour}}$$

où t_{jour} est la période de rotation de la terre. Il s'en suit que

$$\begin{aligned} \Delta &= -2t_T \left(\frac{v_T v_C}{c^2} \right) \\ &= -2 \left(\frac{t_T}{t_{jour}} \right) \left(\frac{v_C^2}{c^2} \right) t_T. \end{aligned}$$

Le voyage dura environ $t_T = 45$ hrs. Une vitesse moyenne de 220m/s mène à un

résultat très près de la mesure qui fut effectuée.

3.6 Effet Doppler: cas relativiste

Puisque la lumière se propage dans le vide (pas d'*éther*), nous avons à tenir compte que de la vitesse relative entre la source et le récepteur (pas de vitesse par rapport au milieu).

Cas du mouvement longitudinal

Deux impulsions de lumière sont émises d'une source fixe à l'origine de S en $t_1 = 0$ et en $t_2 = \tau$ (voir figure 3.8). L'émission des deux impulsions correspondent donc

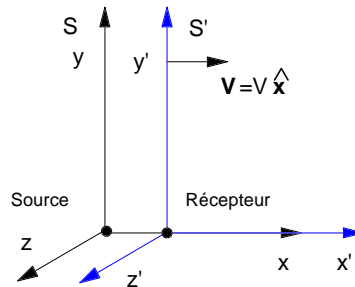


Figure 3.8 Effet Doppler: Deux impulsions de lumière sont émises d'une source fixe à l'origine de S en $t_1 = 0$ et en $t_2 = \tau$.

aux événements:

$$\mathcal{E}_1 : x_1 = 0, \quad t_1 = 0$$

$$\mathcal{E}_2 : x_2 = 0, \quad t_2 = \tau$$

Dans S' , de vitesse $\mathbf{V} = V \hat{\mathbf{x}}$ par rapport à S , ces impulsions sont perçues en $x'_1 = 0$ à l'instant $t'_1 = 0$ (si S et S' coïncident en $t = t' = 0$) et en

$$x'_2 = \gamma(x_2 - Vt_2) = -\gamma V\tau \quad (3.45)$$

à l'instant

$$t'_2 = \gamma(t_2 - Vx_2) = \gamma\tau. \quad (3.46)$$

soit

$$\mathcal{E}_1 : x'_1 = 0, \quad t'_1 = 0$$

$$\mathcal{E}_2 : x'_2 = -\gamma V\tau, \quad t'_2 = \gamma\tau.$$

Il s'écoulera toutefois un délai avant que cette seconde impulsion soit détectée à l'origine

$x' = 0$ de S'

$$\Delta t' = \frac{|x'_2|}{c} = |x'_2| = V\gamma\tau. \quad (3.47)$$

À l'origine de S' , le temps écoulé entre la réception des deux impulsions est

$$t'_2 + \Delta t' = \gamma\tau + \gamma V\tau = \frac{1+V}{\sqrt{1-V^2}}\tau = \sqrt{\frac{1+V}{1-V}}\tau. \quad (3.48)$$

Si la source dans S émet plutôt un signal périodique de fréquence ν , la fréquence observée par un observateur s'éloignant de la source sera

$$\nu'_L = \sqrt{\frac{1-V}{1+V}}\nu = \frac{1-V}{\sqrt{1-V^2}}\nu. \quad (3.49)$$

Si $\beta \ll 1$:

$$\sqrt{\frac{1-V}{1+V}} = (1-V)^{\frac{1}{2}}(1+V)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.50)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}V + \dots\right) \left(1 - \frac{1}{2}V + \dots\right) \quad (3.51)$$

$$\simeq 1 - V + \dots \quad (3.52)$$

En accord avec le cas acoustique non-relativiste. Si l'observateur s'approche, plutôt que de s'éloigner, on remplace V par $-V$.

Cas du mouvement transversal

L'effet Doppler est aussi observable transversalement au mouvement relatif de la source (voir figure 3.9). Il dépend alors directement de la dilatation du temps:

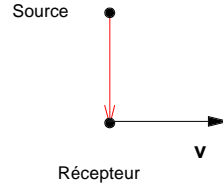


Figure 3.9 Effet Doppler: La source émet transversalement au mouvement de l'observateur.

$$t' = \gamma\tau \quad (3.53)$$

alors

$$\nu'_T = \frac{1}{\gamma}\nu = \sqrt{1-V^2}\nu. \quad (3.54)$$

En général, pour une observation à angle θ par rapport à la direction du mouvement de la source (voir figure 3.10), on aura

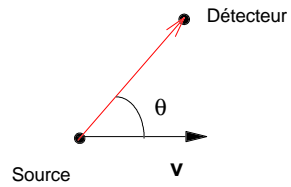


Figure 3.10 Effet Doppler (cas général)

$$\nu'(\theta) = \frac{\sqrt{1-V^2}}{1-V\cos\theta}\nu, \quad (V > 0 \text{ pour rapprochement}). \quad (3.55)$$

3.7 Horloges accélérées

La relativité restreinte ne fait pas de prédiction relative à l'effet dynamique de l'accélération (tel les tensions induites...). Si l'effet est absent ou n'existe pas, on peut supposer que $t' = \gamma\tau$ s'applique à chaque instant pour une horloge accélérée avec v (dans γ) la vitesse instantanée. Deux conséquences s'ensuivent:

1. Dans un repère non-inertiel en mouvement circulaire uniforme : $t' = \gamma\tau$
2. Si \mathbf{v} est constant sauf en de brefs instants d'accélération, la relation $t' = \gamma\tau$ sera encore valide.

Pour $\mu^- \rightarrow e^- + \nu + \bar{\nu}$ avec $\tau \simeq 2.2 \times 10^{-6}$ s. On observe le temps de vie dilaté $\gamma\tau$ lorsque les μ^- sont en mouvement circulaire uniforme dans un champ magnétique (accélérateur).

3.8 Formalisme quadri-dimensionnel

Rappelons que

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - Vx) \\ x' &= \gamma(x - Vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (3.56)$$

En adoptant la notation avec des indices (0, 1, 2, 3), on a:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - Vx^1) \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - Vx^0) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned} \quad (3.57)$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle ainsi:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V & 0 & 0 \\ -\gamma V & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

ou encore

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (3.59)$$

où Λ^μ_ν est appelée matrice de transformation de Lorentz et où x^μ est un quadri-vecteur

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}). \quad (3.60)$$

**Remarque 3**

Souvent on abrège cette notation par la notation d'Einstein

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (3.61)$$

où la répétition d'indice grec (e.g. $\mu, \nu, \lambda, \sigma \dots$) sous-entend la somme sur des indices 0, 1, 2, 3. Toutefois, la répétition d'indice latin (e.g. $i, j, k, l \dots$) sous-entend la somme sur des indices 1, 2, 3. À noter: des indices identiques ici, il y a un indice inférieur (covariant) et un indice supérieur (contravariant) et la somme correspond à un produit scalaire de Lorentz.

Donc, l'expression précédente n'est pas équivalente à

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \neq \Lambda_i^{\mu} x^i \quad (3.62)$$

puisque la somme dans le terme de droite ne s'effectue que sur les composantes $i = 1, 2, 3$.

Le tenseur métrique

Réexaminons un quadri-vecteur avec plus d'attention. Plus formellement, dans un espace vectoriel à D dimensions, il est possible de choisir D vecteurs de bases e_{μ} et de représenter un vecteur A à partir de ses composantes parallèles aux e_{μ} . Alors tout vecteur A s'écrit

$$A = \sum_{\mu=0}^3 A^{\mu} e_{\mu} = A^{\mu} e_{\mu} \quad (3.63)$$

où A^{μ} sont appelées les composantes contravariantes de A . Dans un changement de système de coordonnées, comme une transformation de Lorentz, les bases deviennent

$$e^{\mu} \rightarrow e^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} e^{\nu}. \quad (3.64)$$

Le *produit scalaire* de deux vecteurs A et B prend la forme

$$A \cdot B \equiv A^{\mu} e_{\mu} \cdot B^{\nu} e_{\nu} = A^{\mu} B^{\nu} g_{\mu\nu} \quad (3.65)$$

où

$$g_{\mu\nu} \equiv e_{\mu} \cdot e_{\nu} \quad (3.66)$$

est appelé le *tenseur métrique* ou simplement la *métrique*. Il est commun, et plus simple de choisir une base où les vecteurs de base sont *orthogonaux*: soit,

$$g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{si} \quad \mu \neq \nu \quad (3.67)$$

et donc

$$A \cdot B = A^{\mu} B^{\mu} e_{\mu}^2 \quad (3.68)$$

Pour le cas des quadri-vecteurs d'espace-temps dans l'espace de Minkowski, la longueur généralisé d'un vecteur espace-temps est relié à l'intervalle, e.g.

$$\begin{aligned} x^2 &= x^{\mu} x^{\mu} e_{\mu}^2 \\ &= (x^{\mu})^2 e_{\mu}^2 \\ &= (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \\ &= t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \end{aligned} \quad (3.69)$$

alors la norme des vecteurs de base est

$$e_\mu^2 = \begin{cases} -1 & \text{si } \mu = 0 \\ 1 & \text{si } \mu = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (3.70)$$

est le tenseur métrique s'écrit

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.71)$$

Composantes covariantes

Les composantes covariantes sont des projections orthogonales de A sur les vecteurs de base e_μ . Par exemple,

$$e_\mu \cdot A \equiv A_\mu \quad (3.72)$$

(à noter l'indice inférieur) ou autrement dit

$$\begin{aligned} A_\mu &\equiv e_\mu \cdot A = e_\mu \cdot A^\nu e_\nu \\ &= g_{\mu\nu} A^\nu \end{aligned}$$

À noter, le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et son inverse $g^{\mu\nu}$ coïncident

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \quad (3.73)$$

et

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu \quad (3.74)$$

d'où

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad (3.75)$$

et

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4. \quad (3.76)$$

Par exemple, pour le quadri-vecteur contravariant de position

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}). \quad (3.77)$$

on aura un quadri-vecteur covariant de position:

$$\begin{aligned} x_\nu &= (x_0, x_1, x_2, x_3) \\ &= g_{\mu\nu} x^\mu \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\ &= (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) \end{aligned} \quad (3.78)$$

et donc

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, \mathbf{x}) \\ x_\mu &= (x^0, -\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.79)$$

La transformation inverse de Lorentz peut aussi s'écrire dans cette notation

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma V & 0 & 0 \\ \gamma V & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

ou encore

$$x^\mu = \tilde{\Lambda}_\nu^\mu x'^\nu \quad (3.81)$$

où $\tilde{\Lambda}_\nu^\mu = (\Lambda_\nu^\mu)^{-1}$.

Remarque 4

Toute quantité qui a la forme d'un produit scalaire

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu$$

est un invariant de Lorentz, c'est-à-dire que cette quantité n'est pas affectée par une transformation de Lorentz et donc a la même valeur dans tous les systèmes de référence inertiels



Exemple 3.5



Un repère S' se déplace à une vitesse 0.8 par rapport au repère S . Les horloges sont ajustées de telle sorte qu'à $t = t' = 0$, on a $x = x' = 0$. Deux événements se produisent: l'événement 1 à $x_1 = 10 \text{ m}$, $t_1 = 60 \text{ m}$ et l'événement 2 à $x_2 = 50 \text{ m}$, $t_2 = 90 \text{ m}$.

Quelle distance, dans S' , sépare les endroits où se sont produits les deux événements?

Une réponse trop hâtive serait d'utiliser la formule de contraction des longueurs

$$\Delta x' = \frac{1}{\gamma} \Delta x$$

c'est-à-dire, comme $\gamma = \frac{5}{3}$:

$$\Delta x' = \frac{3}{5} (40 \text{ m}) = 24 \text{ m}.$$

Mais cette façon de procéder indique que l'on a pas respecté la règle qui s'applique pour le calcul des contractions de longueurs, il faut que les positions soient notées au même instant dans S' . Dans le cas qui nous concerne, nous avons plutôt

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \gamma (\Delta t - V \Delta x) \\ &= \frac{5}{3} (30 \text{ m} - 0.8 \cdot 40 \text{ m}) \\ &= -3.3 \text{ m} \neq 0 \end{aligned}$$

Calculons cette fois-ci $\Delta x'$ de la bonne manière:

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma (\Delta x - V \Delta t) \\ &= \frac{5}{3} (40 \text{ m} - 0.8 \cdot 30 \text{ m}) \\ &\simeq 27 \text{ m}. \end{aligned}$$

ce qui est différent du 24 m obtenu plus haut.

Exemple 3.6



Une fusée de 100 m de long se déplace à la vitesse 0.6 par rapport à la Terre. Un signal radio est émis d'une station terrestre au moment où la queue de la fusée passe vis-à-vis de cette station.

(a) À quelle distance, pour les observateurs terrestres, se trouve la tête de la fusée au moment où un récepteur placé dans la tête reçoit le signal?

(b) Toujours pour les observateurs terrestres, quelle durée s'est écoulée entre l'émission (événement \mathcal{E}) et la réception (événement \mathcal{R})?

(c) D'après des mesures faites par des observateurs de la fusée, combien de temps s'est écoulé entre \mathcal{E} et \mathcal{R} ?

Ce problème est illustré par le diagramme de Minkowski à la figure ci-contre.

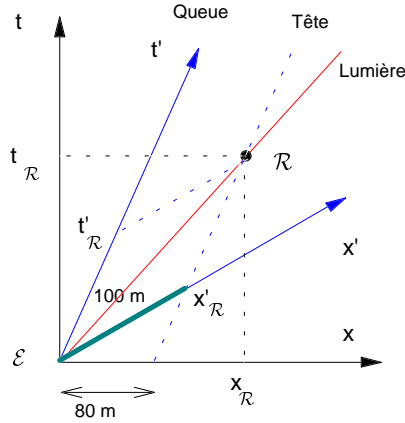


Figure 3.11 Diagramme espace-temps de la fusée.

Identifions tout d'abord les événements et leurs coordonnées.

événement \mathcal{E}	$x = x' = 0$ $t = t' = 0$
événement \mathcal{R}	$x = x_{\mathcal{R}} \quad t = t_{\mathcal{R}}$ $x' = x'_{\mathcal{R}} \quad t' = t'_{\mathcal{R}}$

avec ici,

$$\gamma = \left[1 - \left(\frac{3}{5} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{4}$$

Pour la Terre, la fusée a donc une longueur de 80 m.

(a) Il y a deux façon de calculer $x_{\mathcal{R}}$: graphiquement on note tout de suite que

$$x_{\mathcal{R}} = 80 \text{ m} + V \cdot t_{\mathcal{R}}$$

mais comme on voit que $x_{\mathcal{R}} = t_{\mathcal{R}}$ alors on en tire que $x_{\mathcal{R}} = 200 \text{ m}$, ou alors plus formellement,

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{R}} &= \gamma (x'_{\mathcal{R}} + V t'_{\mathcal{R}}) \\ &= \gamma (100 \text{ m} + 0.6 \cdot 100 \text{ m}) = 200 \text{ m} \end{aligned}$$

la valeur de $t'_{\mathcal{R}} = 100 \text{ m}$ provient du fait que dans S' la durée entre les événements est de $\frac{100}{c} = 100$.

(b) Si $x_{\mathcal{R}} = 200 \text{ m}$, on a nécessairement $t_{\mathcal{R}} = 200 \text{ m}$ (la vitesse de la lumière est 1)

(c) On veut ici calculer $t'_{\mathcal{R}}$,

$$\begin{aligned} t'_{\mathcal{R}} &= \gamma (t_{\mathcal{R}} - V x_{\mathcal{R}}) \\ &= \frac{5}{4} \left(200 \text{ m} + \frac{3}{5} \cdot 200 \text{ m} \right) \\ &= 100 \text{ m}. \end{aligned}$$



4 DYNAMIQUE RELATIVISTE

Le changement fondamental apporté au concept espace-temps nécessite une révision des lois de la mécanique développées pour des vitesses non relativistes. Ainsi $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$ n'est pas valide: il suffirait d'appliquer une force constante suffisamment longtemps pour accélérer jusqu'à une vitesse plus grande que celle de la lumière!

Les lois de la mécanique sont toujours soumises au principe de l'invariance galiléenne. En incorporant la transformation de Lorentz à ce principe, on dira que

Postulat 4.1 *Les lois fondamentales de la physique ont la même forme dans tous les repères reliés par une transformation de Lorentz*

4.1 Conservation de la quantité de mouvement

Pour une collision de deux particules de même masse, vue du repère du centre de masse, on a (voir figure 4.1)

$$(p_{1y} + p_{2y})_{\text{avant}} = (p_{1y} + p_{2y})_{\text{après}} \quad (4.1)$$

$$\implies \Delta p_{1y} = -\Delta p_{2y}. \quad (4.2)$$

Si $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$:

$$\Delta p_{1y} = -\Delta p_{2y} = -2Mv_y. \quad (4.3)$$

La conservation de la quantité de mouvement dans le repère S du centre de masse provient davantage de la symétrie que de sa définition!

Reconsidérons la même collision dans un repère S' de vitesse (voir figure 4.2)

$$\mathbf{V} = v_x \hat{\mathbf{x}} \quad (4.4)$$

par rapport au repère S du centre de masse. Dans S' on doit avoir

$$v'_{1y} = \frac{-v_y}{\gamma(1 + v_x V)} = \frac{-v_y}{(1 + v_x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.5)$$

$$v'_{2y} = \frac{v_y}{\gamma(1 - v_x V)} = \frac{v_y}{(1 - v_x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.6)$$

Ainsi $|v_{1y}| \neq |v'_{2y}|$.

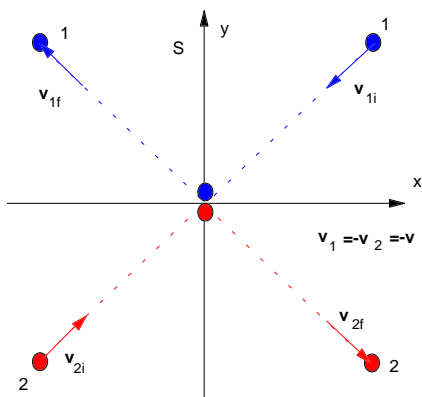


Figure 4.1 Collision de deux particules de même masse, vue du repère du centre de masse.

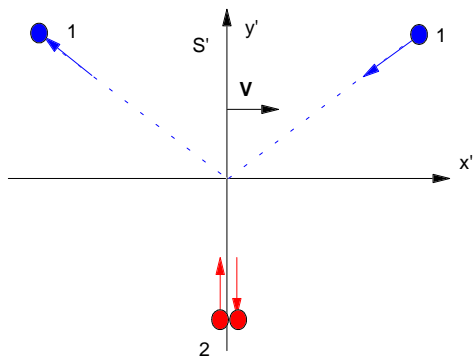


Figure 4.2 Collision dans un repère S' .

Pour la définition newtonienne de la quantité de mouvement, on a donc $\Delta p_{1y} \neq -\Delta p_{2y}$!

Si l'on veut conserver la loi de la quantité de mouvement, on doit lui trouver une nouvelle définition qui soit compatible avec l'invariance de Lorentz. Cette nouvelle définition de \mathbf{p} doit se réduire à $M\mathbf{v}$ pour $|\mathbf{v}| \ll c = 1$. À cause de la transformation de Lorentz, nous savons que Δt n'est pas le même dans tous les repères. Ainsi $v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$ n'a pas la même valeur dans tous les repères en mouvement relatif suivant l'axe x . Par contre, $\frac{\Delta y}{\Delta \tau} = \gamma \frac{\Delta y}{\Delta t}$ est invariant pour les repères. Alors, si on définit $\mathbf{p} = \gamma M \mathbf{v}$ on aura $p_y = M \frac{\Delta y}{\Delta \tau}$ avec la même valeur dans tous les repères en mouvement relatif suivant x .

$$\mathbf{p} = \gamma M \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta \tau} = \gamma M \mathbf{v}. \quad (4.7)$$

(voir figure 4.3).

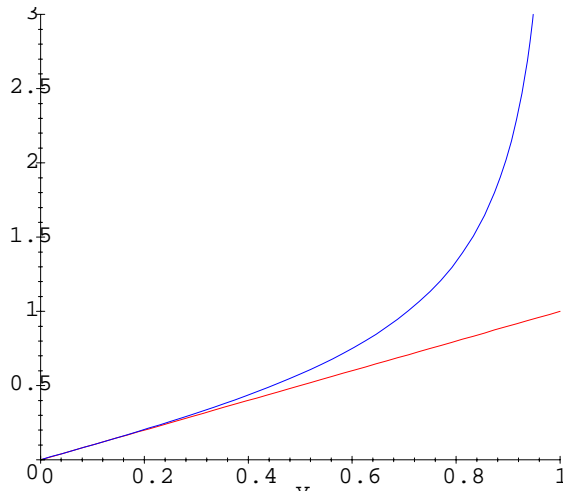


Figure 4.3 Le momentum $p = \gamma M v$ (en unités arbitraires) en fonction de v .

Dans cette définition:

1. τ est le temps propre de la particule, le temps mesuré dans le repère de la particule au repos;
2. γ est calculé avec la vitesse $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}$ de la particule et non pas avec celle d'une transformation de Lorentz.
3. M est la masse au repos de la particule, la seule que l'on puisse mettre sur une balance! Il est inutile et inopportun d'introduire une *masse relativiste* γM . Le facteur γ n'ayant rien à voir à la *quantité de matière* de la particule!

4.2 Énergie cinétique

Pour une particule de vitesse \mathbf{v} , on forme, avec

$$\beta = \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.8)$$

l'invariant

$$\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 \equiv 1 \quad (4.9)$$

multipliée par M^2 , cette expression devient

$$\begin{aligned} M^2 &= (\gamma M)^2 - (\gamma M v)^2 \\ &= (\gamma M)^2 - p^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Cette dernière expression, invariante, suggère que γM pourrait être une quantité importante, on a

$$\begin{aligned} \gamma M &= \frac{M}{\sqrt{1 - v^2}} = M \left(1 + \frac{1}{2} v^2 + \dots \right) \\ &= M + \frac{1}{2} M v^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.11)$$

Au deuxième terme du développement, on reconnaît l'énergie cinétique non-relativiste. Ce résultat suggère la définition

$$E = \gamma M \quad \text{pour l'énergie totale d'une particule libre.}$$

Ainsi,

$$E^2 - p^2 = M^2 \quad (4.12)$$

est un invariant de Lorentz analogue à $t^2 - \mathbf{r}^2 = \tau^2$.

4.3 Le quadri-vecteur d'énergie-impulsion

Les notions d'énergie et d'impulsion sont intimement liées (tout comme l'espace et le temps). Ce lien devient évident dans la notation quadri-vectorielle (ou covariante). Revoyons ces concepts selon de ce nouveau point de vue.

Pour définir une impulsion dans la notation quadri-vectorielle, il nous faut d'abord un quadri-vecteur vitesse. Nous possédons déjà un quadri-vecteur déplacement soit

$$\Delta x^\mu = (\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z). \quad (4.13)$$

Le fait de diviser par dt cette quantité ne nous fournit cependant pas un quadri-vecteur contravariant puisque la quantité dt n'est pas un invariant relativiste. On sait toutefois qu'il existe une autre quantité ayant les dimensions du temps tout en étant aussi un invariant: le temps propre $d\tau$. Nous définissons donc une nouvelle quantité: la quadri-vitesse u^μ ,

$$u^\mu = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right). \quad (4.14)$$

Pour obtenir un quadri-vecteur impulsion modelé sur le vecteur impulsion classique, il nous faut multiplier cette quantité par une quantité invariante ayant les dimensions d'une masse. Ne sachant pas *a priori* si la masse d'une particule est une quantité invariante, nous allons utiliser la masse propre m_0 , i.e. la masse mesurée dans le repère où elle est

au repos comme facteur multiplicatif pour obtenir

$$p^\mu \equiv m_0 u^\mu = (m_0 \frac{dt}{d\tau}, m_0 \frac{dx}{d\tau}, m_0 \frac{dy}{d\tau}, m_0 \frac{dz}{d\tau}). \quad (4.15)$$

Voilà donc un nouveau quadri-vecteur dont on ne sait pas pour l'instant la signification physique. Essayons donc de la préciser. Comme $d\tau = \gamma^{-1} dt$, la partie spatiale de ce quadri-vecteur s'écrit:

$$p^j = \gamma m_0 (v^1, v^2, v^3) \quad (4.16)$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v} \quad (4.17)$$

où \mathbf{v} est la vitesse de la particule dans le repère S .

Voyons ce que ça donne pour des vitesses faibles par rapport à celle de la lumière. Pour $v \ll 1$, $\gamma \rightarrow 1$ d'où

$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v}.$$

C'est là l'impulsion habituelle que nous connaissons.

Qu'en est-il de la composante temporelle p^0 du quadri-vecteur impulsion? Si $v \ll 1$,

$$(1 - v^2)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}v^2 + \dots \quad (4.18)$$

d'où

$$p^0 = \gamma m_0 = m_0 + \frac{1}{2}m_0 v^2 + \dots \quad (4.19)$$

On reconnaît dans le deuxième terme de cette relation l'énergie cinétique habituelle. Mais qu'en est-il du premier terme qui s'écrit $m_0 c^2$? Cette expression qui est devenue la formule fétiche de la relativité a été interprétée par Einstein comme étant l'énergie propre de la matière. Autrement dit, du seul fait qu'une particule a une masse m_0 , elle a un contenu en énergie de grandeur $m_0 c^2$, lequel contenu, comme le dit Einstein peut-être mis en évidence par les émissions d'atomes lourds comme le radium. On connaît maintenant le sens de cette prédiction...

Il s'avère que le quadri-vecteur impulsion est en fait un quadri-vecteur impulsion

$$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z) \quad (4.20)$$

où l'énergie E est l'énergie totale. Si on a besoin de l'énergie cinétique, on devra écrire

$$\begin{aligned} K &= E - m_0 \\ &= (\gamma - 1)m_0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

ce qui signifie, en fait, que l'expression classique $K = \frac{1}{2}mv^2$ n'est qu'une approximation valide pour les vitesses faibles.

Voyons maintenant quelle est la *grandeur* de p^μ . On écrit donc

$$\begin{aligned} p \cdot p &= p^\mu p_\mu = g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta \\ &= (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 \\ &= E^2 - \mathbf{p}^2 \\ &= (\gamma m_0)^2 - (\gamma m_0 \mathbf{v})^2 \\ &= \gamma^2 m_0^2 (1 - \mathbf{v}^2) \\ &= m_0^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

On a donc finalement

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = m_0^2$$

ou

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m_0^2. \quad (4.23)$$

On a donc trouver un autre invariant qui s'avère très utile dans un grand nombre de calculs relativistes. En réinsérant la vitesse de la lumière c , on a

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (4.24)$$

Les relations de conservation d'énergie et d'impulsion peuvent maintenant être exprimée de façon très compacte. L'énergie-impulsion totale d'un système est la somme

$$P^\mu = \sum_n p_n^\mu. \quad (4.25)$$

Si on pose qu'il y a conservation d'énergie et d'impulsion

$$P_{\text{avant}}^\mu = P_{\text{après}}^\mu \quad (4.26)$$

il en découle que

$$P_{\text{avant}}^i = P_{\text{après}}^i \quad \text{ou} \quad \mathbf{P}_{\text{avant}} = \mathbf{P}_{\text{après}} \quad (4.27)$$

ce qui est la conservation de l'impulsion totale et

$$P_{\text{avant}}^0 = P_{\text{après}}^0 \quad (4.28)$$

ce qui est la conservation de l'énergie totale, qui s'écrit aussi

$$E_{\text{avant}}^{\text{tot}} = E_{\text{après}}^{\text{tot}}. \quad (4.29)$$

On peut aussi déduire une autre relation importante. D'une part, la quantité P^μ (l'énergie-impulsion totale) est conservée, et d'autre part, la *grandeur* de toute énergie-impulsion est un invariant relativiste (même grandeur dans tous les repères). On aura donc, par exemple dans le repère du laboratoire

$$\left(P_{\text{Lab}}^\mu \right)^2 = \left(P_{\text{Lab}}^\mu \right)^2$$

mais puisqu'il s'agit d'invariant de Lorentz (relativiste), cette quantité est la même dans tous les repères. Dans un repère S' on aura

$$\left(P_{\text{Lab}}^\mu \right)^2 = \left(P_{\text{Lab}}^\mu \right)^2 = \left(P_{S'}^\mu \right)^2 = \left(P_{S'}^\mu \right)^2. \quad (4.30)$$

Dans le repère d'impulsion totale nulle (RIN), i.e. le repère où le centre de masse du système est au repos, les calculs sont généralement plus simples. Alors que la dernière relation teint toujours

$$\left(P_{\text{Lab}}^\mu \right)^2 = \left(P_{\text{Lab}}^\mu \right)^2 = \left(P_{\text{RIN}}^\mu \right)^2 = \left(P_{\text{RIN}}^\mu \right)^2. \quad (4.31)$$

on aura dans ce repère spécial,

$$\begin{aligned} \left(P_{\text{RIN}}^\mu \right)^2 &= \left(P_{\text{RIN}}^0 \right)^2 - \left(\mathbf{P}_{\text{RIN}} \right)^2 \\ &= \left(P_{\text{avant}}^0 \right)^2 = \left(E_{\text{avant}}^{\text{tot}} \right)^2 \end{aligned}$$

$$= \left(\sum_n E_n \right)^2. \quad (4.32)$$

Cette quantité correspond donc à la somme des énergies totales dans le RIN, élevée au carré.

4.4 Travail et énergie cinétique

Si l'on définit l'énergie cinétique relativiste par l'expression

$$K = E - M = (\gamma - 1) M \underset{\text{pour } v \ll 1}{\simeq} \frac{1}{2} M v^2 \quad (4.33)$$

on doit vérifier que le travail pour amener une particule de la vitesse v_1 à la vitesse v_2 demeure

$$W = K(v_2) - K(v_1). \quad (4.34)$$

Calculons le travail $W = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ requis pour donner une vitesse v à une particule initialement au repos. En utilisant

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \text{avec} \quad \mathbf{p} = \gamma M \mathbf{v} \quad (4.35)$$

on a

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} M \mathbf{v} + \gamma M \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (4.36)$$

et

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}}{(1 - v^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.37)$$

Pour une force $\mathbf{F} = F \hat{\mathbf{x}}$, on trouve

$$\begin{aligned} W &= \int F dx = \int \frac{d}{dt} (\gamma M v) dx \\ &= \int \left[\frac{M v^2 \dot{v}}{(1 - v^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{M \dot{v}}{(1 - v^2)^{\frac{1}{2}}} \right] v dt \\ &= \int \frac{M v \dot{v}}{(1 - v^2)^{\frac{3}{2}}} [v^2 + (1 - v^2)] dt \\ &= \int \frac{M v \dot{v}}{(1 - v^2)^{\frac{3}{2}}} dt \\ &= \int_0^t \frac{d}{dt'} \left[\frac{M}{(1 - v^2)^{\frac{1}{2}}} \right] dt' = \frac{M}{(1 - v^2(t))^{\frac{1}{2}}} \Big|_0^t \\ &= (\gamma - 1) M = \Delta K. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Ce résultat nous apprend que $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ demeure valide avec $\mathbf{p} = \gamma M \mathbf{v}$.

4.5 Transformations de Lorentz de \mathbf{p} et E

En terme de $d\tau = \frac{1}{\gamma}dt$, on a

$$\mathbf{p} = \gamma M \mathbf{v} = \gamma M \frac{d\mathbf{r}}{dt} = M \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \quad (4.39)$$

et

$$E = \gamma M = M \frac{dt}{d\tau}. \quad (4.40)$$

Puisque M et τ sont des invariants de Lorentz, on a que

$$p_x = M \frac{dx}{d\tau}, \quad p_y = M \frac{dy}{d\tau}, \quad p_z = M \frac{dz}{d\tau} \quad (4.41)$$

et

$$E = M \frac{dt}{d\tau} \quad (4.42)$$

se transforment comme x, y, z et t respectivement:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - vx) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} p'_x &= \gamma(p_x - vE) \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \\ E' &= \gamma(E - vp_x) \end{aligned} \right. \quad (4.43)$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

ou dans le formalisme quadri-vectorel

$$p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} p^{\nu}. \quad (4.45)$$

Remarque 5



Le facteur γ qui est explicite ici est le γ de la transformation de Lorentz. Ne pas confondre avec celui qui apparaît dans $\mathbf{p} = \gamma M \mathbf{v}$ et $E = \gamma M$!

La vitesse d'une particule de quantité de mouvement \mathbf{p} et d'énergie E :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \left(\frac{\mathbf{p}}{M} \right) \frac{M}{E} = \frac{\mathbf{p}}{E} \quad (4.46)$$

$$\mathbf{p} = E \mathbf{v} \quad (4.47)$$

Pour un photon, particule de masse nulle, on a

$$\mathbf{p} = E \hat{\mathbf{p}}. \quad (4.48)$$

4.6 Exemple: collision inélastique

On considère la collision de deux particules identiques qui restent collées:

- dans le repère de centre de masse: $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 = 0$ et,
- dans un repère S' arbitraire: $\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}'_3$.

Ces deux équations doivent être reliées par la transformation de Lorentz reliant le repère S' au repère S du centre de masse. Si la vitesse de S' par rapport à S est $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$, la composante x de la deuxième équation s'écrit:

$$\gamma(p_{1x} + p_{2x}) - \gamma V(E_1 + E_2) = \gamma p_{3x} - \gamma V E_3 \quad (4.49)$$

mais

$$p_{1x} + p_{2x} = p_{3x} = 0 \implies E_1 + E_2 = E_3$$

donc il y a conservation de l'énergie relativiste. Puisque les particules initiales sont identiques, on a d'une part $E_3 = 2E = 2\gamma M$ et d'autre part: $E_3 = M_3$ alors

$$M_3 = 2\gamma M! \quad (4.50)$$



Remarque 6

Attention: La masse propre d'une particule ou d'un objet correspond à sa masse telle que mesurée au repos et à l'état libre (soumise à aucune interaction). Par contre, pour la masse d'un système de particules ou d'un objet qui est soumis à des interactions est identifiée à la différence entre son énergie totale et son énergie cinétique totale: $M_{\text{totale}} = E_{\text{totale}} - K_{\text{totale}}$, où E_{totale} inclut l'énergie associée aux interactions (e.g. énergie potentielle).

La masse (au repos) de la particule résultante est plus grande que la somme des masses initiales: l'énergie cinétique initiale est convertie en masse additionnelle ($M_3 - 2M$) de la particule résultante.

Pour $\beta = V \ll 1$:

$$\begin{aligned} M_3 &= 2M(1 - V^2)^{-\frac{1}{2}} \simeq 2M\left(1 + \frac{1}{2}V^2 + \dots\right) \\ &\simeq 2\left(M + \frac{1}{2}MV^2 + \dots\right) \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\Delta M = M_3 - 2M = 2K \implies 2K = \Delta M.$$

Cette possibilité de transformer de l'énergie en masse est la manifestation la plus célèbre de la relativité.

$$\left(\begin{array}{c} \text{perte ou gain net} \\ \text{de masse au repos} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{gain ou perte net} \\ \text{d'énergie cinétique} \end{array} \right). \quad (4.52)$$

Ainsi, par exemple,

$$\left(\begin{array}{c} \text{masse d'un ressort} \\ \text{compressé} \end{array} \right) > \left(\begin{array}{c} \text{masse d'un ressort} \\ \text{non-compressé} \end{array} \right) \quad (4.53)$$

$$\Delta M = \text{travail de compression}. \quad (4.54)$$

Dans le cas général, on montre que la quantité de mouvement peut être conservée seulement si

$$\sum_i \gamma_i M_i = \sum_i E_i \quad (4.55)$$

est conservé, avant et après la réaction (si un photon ($M\gamma = 0$) est impliqué, cette forme doit être modifiée).

4.7 Exemples quantitatifs



Exemple 4.1

Pour deux masses de 1 kg ($1 \text{ MeV} = 1.7827 \times 10^{-30} \text{ kg}$ ou $1 \text{ kg} = 5.6095 \times 10^{29} \text{ MeV}$) qui restent collées après la collision:

$$\Delta M = \Delta E \simeq 2 \left(\frac{Mv^2}{2} \right) = Mv^2 \quad (4.56)$$

si $v \ll c = 1$. Pour

$$\begin{aligned} v &= |\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| \\ &= 1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 3600 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \\ &= 0.333 \times 10^{-5} \ll c = 1 \end{aligned}$$

, on a

$$\begin{aligned} \Delta M &\simeq 6.2203 \times 10^{18} \text{ MeV} \\ &\simeq 1.1089 \times 10^{-11} \text{ kg}. \end{aligned}$$



Exemple 4.2

Pour l'atome d'hydrogène,

$$M_H < M_p + M_e \quad (4.57)$$

et l'énergie de liaison est

$$\Delta M = 13.6 \text{ eV} = 1.36 \times 10^{-8} \text{ GeV} \quad (4.58)$$

L'énergie de liaison représente donc 1 partie dans 10^8 de l'énergie de l'hydrogène $E = M_H$.



Exemple 4.3

Le deutéron: Les masses du proton, du neutron et du deutéron sont

$$M_p = 938.272 \text{ MeV}$$

$$M_n = 939.566 \text{ MeV}$$

$$M_d = 1875.613 \text{ MeV}$$

d'où

$$M_p + M_n - M_d = 2.225 \text{ MeV}$$

C'est exactement l'énergie requise pour le briser ou l'énergie de liaison.

4.8 Particules de masse nulle

Dans le cas d'une particule de masse nulle (γ = photon, ν = neutrinos, ...), certaines relations ont une forme spéciale, i.e.

$$E^2 - p^2 = M^2 \implies E = p$$

pour $M = 0$. Alors,

$$\frac{\mathbf{p}}{E} = \frac{\gamma M \mathbf{v}}{\gamma M} = \mathbf{v} \implies v = c.$$

Les particules de masse nulle se déplacent donc toutes à la vitesse de la lumière.

De plus, pour un photon:

$$E = h\nu$$

et

$$p = h\nu = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad ; \quad \text{où } c = 1.$$

4.9 Effet Doppler-nouvelle approche

L'effet Doppler (cas longitudinal) peut être abordé maintenant pour des cas relativiste. En utilisant les transformations de Lorentz pour l'énergie du photon

$$E' = \gamma (E - V p_x), \quad (4.59)$$

on tire que la fréquence est modifiée par un facteur relativiste

$$h\nu' = \gamma (h\nu - V h\nu) = h\nu\gamma (1 - V) \quad (4.60)$$

c'est-à-dire

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{(1 - V)}{(1 + V)}}. \quad (4.61)$$

Ce résultat concorde avec celui obtenu précédemment.

4.10 Pression de radiation

Considérons un grand nombre N de photons dans un cube de côté L . La force moyenne exercée sur les parois est

$$F = \left(\begin{array}{c} \text{Nombre de collisions} \\ \text{par unité de temps} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{Changement } \mathbf{p} \\ \text{par collision} \end{array} \right). \quad (4.62)$$

Si on suppose qu'en moyenne $\frac{N}{3}$ photons se déplacent le long de chacune des trois directions perpendiculaires aux parois et qu'un photon fait $\frac{c}{6L} = \frac{1}{6L}$ collisions par unité de temps, on a

$$F = \left(N \frac{c}{6L} \right) \left(\frac{2E}{c} \right) = \frac{NE}{3L}$$

où $2E = 2p$ est la quantité de mouvement transmise à la paroi à chaque collision. En terme du nombre de photons par unité de volume ($M = \frac{N}{L^3}$) et de l'énergie totale radiante par unité de volume ($U = NE$) on a $F = \frac{1}{3}UL^2$. La pression est

$$P = \frac{F}{L^2} = \frac{U}{3}. \quad (4.63)$$

4.11 Transformation d'une force

Contrairement aux composantes des vecteurs position et quantité de mouvement (\mathbf{r} et \mathbf{p}) d'une particule, les composantes d'une force \mathbf{F} ne se transforment pas par une transformation de Lorentz, i.e. ce n'est pas un vecteur de Lorentz (contravariant). En fait, la force n'est pas un concept relativiste naturel.

Pour illustrer cette affirmation, transformons l'équation du mouvement d'une particule dans un repère S :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = M \frac{d}{dt} (\gamma \mathbf{v}) \quad (4.64)$$

au repère S' où la particule est instantanément au repos. À l'instant où dans S la vitesse de la particule est $+v\hat{x}$, on a

$$\Delta p_x = \gamma (\Delta p'_x + v \Delta E') = \gamma \Delta p'_x \quad (4.65)$$

car $\Delta E' = 0$.

En effet, dans le repère où la particule est au repos

$$E'^2 = M^2 + p'^2 \implies 2E' \Delta E' = 2\mathbf{p}' \cdot \Delta \mathbf{p}' = 0$$

puisque $\mathbf{p}' = 0$ à l'instant considéré. Par contre, dans les autres directions,

$$\Delta p_y = \Delta p'_y \quad \text{et} \quad \Delta p_z = \Delta p'_z. \quad (4.66)$$

Dans S' , l'intervalle de temps $\Delta t'$ est un intervalle de temps propre: $\Delta t' = \Delta \tau = \frac{1}{\gamma} \Delta t$. Par conséquent:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p_x}{\Delta t} &= \frac{\gamma \Delta p'_x}{\gamma \Delta t'} = \frac{\Delta p'_x}{\Delta t'} \implies F_x = F'_x \\ \frac{\Delta p_y}{\Delta t} &= \frac{\Delta p'_y}{\gamma \Delta t'} \implies F_y = \frac{1}{\gamma} F'_y \\ \frac{\Delta p_z}{\Delta t} &= \frac{\Delta p'_z}{\gamma \Delta t'} \implies F_z = \frac{1}{\gamma} F'_z. \end{aligned} \quad (4.67)$$

4.12 Invariance de la charge électrique

L'équation du mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique ($q\mathbf{E} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$) est incomplète si on ne connaît pas la dépendance de la charge q sur la vitesse et l'accélération.

L'expérience montre que la charge électrique comme la masse est un invariant de Lorentz. Une évidence très simple de ce fait est que les atomes et les molécules non-ionisées ne sont jamais déviées dans un champ électrique, quelle que soit leur vitesse. Alors pour des vitesses très différentes, les charges des électrons et des photons sont toujours égales (et opposées).

Exercice 4.1

Vérifier à l'aide d'une transformation de Lorentz que si $\mathbf{p} = \gamma M \mathbf{v}$ et $E = \gamma M$ dans S on a $\mathbf{p}' = \gamma' M \mathbf{v}'$ et $E' = \gamma' M$ dans S' en mouvement uniforme par rapport à S .



4.13 Le test: les accélérateurs de particules

La relativité restreinte et ses conséquences sont testées tous les jours aux grands accélérateurs de particules à travers le monde. Les deux plus puissants actuellement en opération sont Fermilab situé à Batavia en banlieue de Chicago et le LEP II au CERN à Genève. Ils accélèrent respectivement des protons et antiprotons à une énergie cinétique de $0.9 \text{ TeV} = 0.9 \times 10^{12} \text{ eV}$ chacun et des électrons et positrons à $80.7 \text{ GeV} = 80.7 \times 10^9 \text{ eV}$ chacun (cela correspond au seuil de production de paires W^+W^- dont la masse est de $m_W = 80.4 \text{ GeV}$). Alors la vitesse des particules se trouvent à partir de la relation

$$\gamma = \frac{E}{M} = 1 + \frac{K}{M}$$

d'où on tire la vitesse

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \\ &\simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2}. \end{aligned}$$

La relation entre la vitesse et l'énergie totale peuvent donc être vérifiées à 1 partie sur 10^7 et 1 partie sur 10^{10} respectivement.

Site(particules)	K	γ	$1 - v$
Fermilab($p\bar{p}$)	0.9 TeV	920	5.92×10^{-7}
CERN-LEP II(e^+e^-)	80.7 GeV	1.58×10^5	2.00×10^{-11}

4.14 Problèmes de dynamique relativiste

Accélération dans un champ électrique constant



Exercice 4.2

Dans un champ $\mathbf{E} = \mathcal{E}\hat{\mathbf{x}}$ uniforme et constant:

$$\dot{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}} = q\mathcal{E}\hat{\mathbf{x}} \quad \text{et} \quad \mathbf{p} = \gamma M\mathbf{v}. \quad (4.68)$$

Pour $v(0) = 0$:

$$M \frac{d}{dt}(\gamma v) = q\mathcal{E} \quad (4.69)$$

alors

$$\gamma v = \frac{q\mathcal{E}t}{M} \quad (4.70)$$

et donc

$$\frac{v^2}{1 - v^2} = \left(\frac{q\mathcal{E}t}{M} \right)^2 \quad (4.71)$$

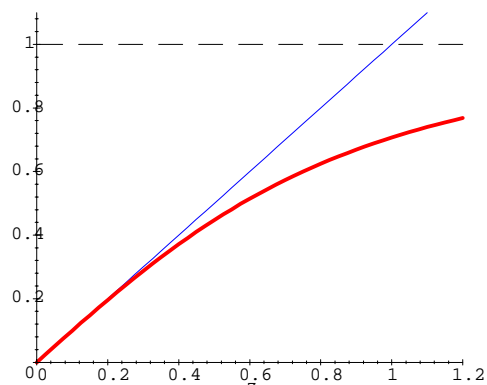


Figure 4.4 La dépendance de v en fonction de $z = \frac{gEt}{M}$.

ce qui mène à

$$v^2 = \frac{\left(\frac{q\mathcal{E}t}{M}\right)^2}{1 + \left(\frac{q\mathcal{E}t}{M}\right)^2} \quad (4.72)$$

ou

$$v = \left[1 + \left(\frac{M}{q\mathcal{E}t}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \gamma = \left[1 + \left(\frac{q\mathcal{E}t}{M}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.73)$$

(voir figure 4.4)

- Pour $t \ll \frac{M}{q\mathcal{E}}$:

$$v \simeq \frac{q\mathcal{E}t}{M}$$

ce qui correspond à l'approximation non-relativiste.

- Pour $t \gg \frac{M}{q\mathcal{E}}$:

$$v \simeq \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{M}{q\mathcal{E}t}\right)^2 + \dots\right) \simeq 1 \simeq c \quad (4.74)$$

$$E = \gamma M \simeq \left(\frac{q\mathcal{E}t}{M}\right) M = q\mathcal{E}t \quad (4.75)$$

$$p = \gamma M v \simeq \gamma M c = q\mathcal{E}t = E \quad (4.76)$$

même si $v \leq c = 1$, E et p peuvent augmenter indéfiniment.

Le déplacement peut être évalué comme suit:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{st}{\sqrt{1 + s^2 t^2}} \quad (4.77)$$

avec $s \equiv \frac{q\mathcal{E}}{M}$. Alors

$$\begin{aligned} x - x(0) &= \int_0^t \frac{st' dt'}{\sqrt{1 + s^2 t'^2}} \\ &= \frac{1}{2s} \int_0^{1+s^2 t^2} \mu^{-\frac{1}{2}} d\mu \\ &= \frac{1}{s} \left[\sqrt{1 + s^2 t^2} - 1 \right] \end{aligned} \quad (4.78)$$

pour $x(0) = 0$ et $v(0) = 0$:

$$x(t) = \frac{M}{q\mathcal{E}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{q\mathcal{E}t}{M}\right)^2} - 1 \right] \quad (4.79)$$

- Pour $t \ll \frac{M}{q\mathcal{E}}$:

$$x(t) \simeq \frac{M}{q\mathcal{E}} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{q\mathcal{E}t}{M}\right)^2 - 1 \right] \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{q\mathcal{E}}{M}\right) t^2. \quad (4.80)$$

- Pour $t \gg \frac{M}{q\mathcal{E}}$:

$$x(t) \simeq \frac{M}{q\mathcal{E}} \left[\frac{q\mathcal{E}t}{M} \right] = t. \quad (4.81)$$

Déflexion dans un champ électrique



Exercice 4.3

Considérons une particule chargée se déplaçant dans un champ électrique de la forme (voir figure 4.5). On a toujours

$$\dot{\mathbf{p}} = q\mathbf{E}$$

d'où on tire

$$\dot{p}_x = 0, \quad \dot{p}_y = q\mathcal{E} \quad (4.82)$$

$$p_x(0) = p_0, \quad p_y(0) = 0 \quad (4.83)$$

$$\mathbf{p}(t) = p_0 \hat{\mathbf{x}} + (q\mathcal{E}t) \hat{\mathbf{y}}. \quad (4.84)$$

Alors

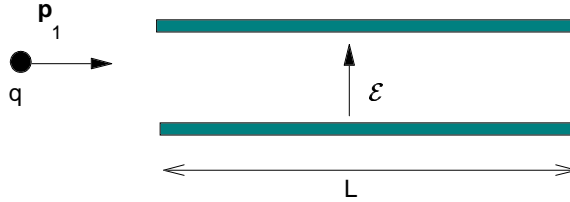


Figure 4.5 Particule chargée dans un champ électrique constant.

$$\begin{aligned} E^2(t) &= M^2 + \mathbf{p}^2(t) = M^2 + p_0^2 + (q\mathcal{E}t)^2 \\ &= E_0^2 + (q\mathcal{E}t)^2 \end{aligned} \quad (4.85)$$

où E_0 : énergie initiale. On a alors

$$\frac{\mathbf{p}}{E} = \frac{\gamma M \mathbf{v}}{\gamma M} = \mathbf{v} \quad (4.86)$$

ou

$$v_x = \frac{p_0}{E} = \frac{p_0}{\sqrt{E_0^2 + (q\mathcal{E}t)^2}} \quad (4.87)$$

$$v_y = \frac{q\mathcal{E}t}{E} = \frac{q\mathcal{E}t}{\sqrt{E_0^2 + (q\mathcal{E}t)^2}}. \quad (4.88)$$

On remarque que $v_x(t)$ décroît dans le temps et que $v_y(t)$ est plus petit que sa valeur non-relativiste $\frac{q\mathcal{E}t}{M}$. Ce résultat est nécessaire afin d'avoir $v_x^2 + v_y^2 \leq c^2 = 1$ en tout temps. On a

$$v_x^2 + v_y^2 = \frac{p_0^2 + (q\mathcal{E}t)^2}{E_0^2 + (q\mathcal{E}t)^2} = \frac{E^2 - M^2}{E^2}. \quad (4.89)$$

L'inclinaison de la trajectoire s'exprime comme le rapport suivant:

$$\tan \theta(t) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{q\mathcal{E}t}{p_0} \quad (4.90)$$

et le temps requis pour parcourir la distance L :

$$\begin{aligned} L &= \int_0^L dx = \int_0^{t_L} \frac{p_0}{\sqrt{E_0^2 + (q\mathcal{E}t')^2}} dt' \\ &= \frac{p_0}{q\mathcal{E}} \sinh^{-1} \left(\frac{q\mathcal{E}t_L}{E_0} \right) \end{aligned} \quad (4.91)$$

ou

$$t_L = \frac{E_0}{q\mathcal{E}} \sinh \left(\frac{q\mathcal{E}L}{p_0} \right). \quad (4.92)$$

L'inclinaison à la sortie du champ (après avoir parcouru une distance L dans la direction des x):

$$\theta_L = \theta(t_L) = \arctan \left\{ \frac{E_0}{p_0} \sinh \left(\frac{q\mathcal{E}L}{p_0} \right) \right\}. \quad (4.93)$$

Particule dans un champ magnétique



Exercice 4.4

L'équation de mouvement d'une particule dans un champ magnétique est

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.94)$$

Alors

$$\frac{d\mathbf{p}^2}{dt} = 2\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 2\mathbf{p} \cdot q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$$

comme dans le cas non-relativiste. Il en découle que

- $|\mathbf{p}|$, $|\mathbf{v}|$ et γ sont constants.
- $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ce qui admet la même solution que dans le cas non-relativiste en remplaçant M par γM .
- La particule aura donc un mouvement circulaire de fréquence $\omega_c = \frac{qB}{\gamma M} = \frac{qB}{M} (1 - v^2)^{\frac{1}{2}}$ et rayon de courbure $\rho = \frac{v}{\omega_c} = \frac{\gamma M v}{qB} = \frac{p}{qB}$. Le rayon de courbure d'une particule chargée dans un champ magnétique est une mesure directe de sa quantité de mouvement relativiste.

Seuil de réactions



Exercice 4.5

La conservation de l'énergie impose une limite aux réactions qui peuvent se produire entre particules.

1. La production de paires

$$\gamma \rightarrow e^+ + e^-$$

est possible seulement si $E_\gamma \geq 2M_e \simeq 1.022 \text{ MeV}$. Mais, dans le repère du centre de masse:

$$\mathbf{p}_\gamma \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_{e^+} + \mathbf{p}_{e^-} = 0!!$$

Cette réaction est impossible dans le vide. Au voisinage d'un noyau:

$$\mathbf{p}_\gamma + \mathbf{p}_N = \mathbf{p}'_N + \mathbf{p}_{e^+} + \mathbf{p}_{e^-}$$

le noyau agit comme "catalyseur". Il faut

$$E_\gamma = 2M_e + \Delta E_N > 2M_e$$

si $\mathbf{p}_N = 0$, on a $\Delta E_N = \frac{p_N^2}{2M_N}$. Si le noyau est assez lourd, il absorbera la quantité de mouvement sans absorber trop d'énergie.

2. Photoproduction de pions: (voir figure 4.6)

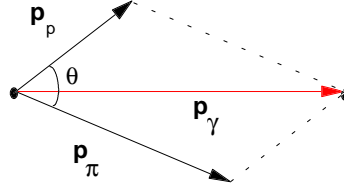


Figure 4.6 Photoproduction de pions.

3. Dans le repère du laboratoire (proton initial au repos):

$$\begin{aligned} \gamma + p &\rightarrow p + \pi^0 \\ &\rightarrow n + \pi^+ \end{aligned}$$

Constatons tout d'abord, qu'au seuil, le p et le π^0 dans le repère du centre de masse sont au repos. Leur vitesse dans ce repère est nulle. Si on se rapporte maintenant au repère du laboratoire on peut alors conclure que le $p + \pi^0$ partent avec la même vitesse finale $v = \beta$:

$$h\nu_{\text{Lab}} + M_p = \gamma (M_p + M_{\pi^0})$$

et

$$h\nu_{\text{Lab}} = \gamma (M_p + M_{\pi^0}) v$$

d'où

$$\begin{aligned} \gamma (M_p + M_{\pi^0}) v + M_p &= \gamma (M_p + M_{\pi^0}) \\ 1 &= \gamma (1 - v) (1 + \alpha) \quad \text{où} \quad \alpha \equiv \frac{M_{\pi^0}}{M_p} = 0.14384. \end{aligned}$$

Alors

$$v = \frac{(1 + \alpha)^2 - 1}{(1 + \alpha)^2 + 1} \simeq 0.133588 \quad \text{et} \quad \gamma \simeq 1.009044$$

où $M_{\pi^0} = 134.96 \text{ MeV}$

4. Dans le repère du centre de masse, le p et le π^0 dans le repère du centre de masse sont au repos:

$$h\nu_{\text{CM}} + \gamma M_p = (M_p + M_{\pi^0})$$

et

$$h\nu_{\text{CM}} - \gamma M_p v = 0$$

où $v = v_p =$ vitesse du proton initial dans le centre de masse. Alors

$$\gamma M_p v + \gamma M_p = (M_p + M_{\pi^0})$$

$$\gamma (v + 1) = (1 + \alpha)$$

et donc on a encore

$$v = \frac{(1 + \alpha)^2 - 1}{(1 + \alpha)^2 + 1} \simeq 0.133588 \quad \text{et} \quad \gamma \simeq 1.009044.$$

Cependant ici,

$$\begin{aligned} h\nu_{\text{CM}} &= \gamma M_p v \\ &= 0.134756 M_p = 126.476 \text{ MeV} \end{aligned}$$

mais ces deux résultats doivent être compatibles avec la formule de Doppler

$$\frac{h\nu_{\text{CM}}}{h\nu_{\text{Lab}}} = \sqrt{\frac{1 - v}{1 + v}}.$$

5. Par l'approche de l'invariance de $E^2 - p^2$: Dans le repère du laboratoire, on a, au seuil:

$$\begin{aligned} E^2 - p^2 &= (h\nu_{\text{Lab}} + M_p)^2 - (h\nu_{\text{Lab}})^2 \\ &= [\gamma (M_p + M_{\pi^0})]^2 - [\gamma v (M_p + M_{\pi^0})]^2 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} 2h\nu_{\text{Lab}} M_p + M_p^2 &= (\gamma^2 - \gamma^2 v^2) (M_p + M_{\pi^0})^2 \\ &= (M_p + M_{\pi^0})^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h\nu_{\text{Lab}} &= \frac{(M_p + M_{\pi^0})^2 - M_p^2}{2M_p} \\ &= \left(M_{\pi^0} + \frac{M_{\pi^0}}{2M_p} \right) \\ &= \alpha \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) M_p \simeq 0.154 M_p \end{aligned}$$

Vitesse du CM d'un système relativiste

Exercice 4.6



La conservation de la quantité de mouvement limite la matérialisation de l'énergie cinétique, sauf dans le repère du centre de masse

$$\left(\sum_i \mathbf{p}_i \right)_{\text{initial}} = 0$$

où toute l'énergie cinétique initiale est matérialisable. La vitesse du centre de masse est

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\sum_i E_i} = \frac{Q. \text{ de } M. \text{ totale}}{\text{Énergie totale}}$$

pour $v_i \ll 1$ ($\gamma_i \simeq 1$) et pas de photon, cette définition se réduit à l'expression non-relativiste:

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i}.$$

Énergie disponible



Exercice 4.7

Quelle est l'énergie disponible à l'excitation ou à la création de particules dans la collision d'un proton accéléré sur un proton au repos?

1. Cas non-relativiste:

$$\begin{aligned} K_{\text{Lab}} &= \frac{1}{2} M_p v^2 \ll M_p \simeq 938 \text{ MeV} \\ K_{\text{CM}} &= \frac{1}{2} M_p \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} M_p \left(\frac{v}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} M_p v^2 = \frac{1}{2} K_{\text{Lab}} \end{aligned}$$

Dans le centre de masse, toute l'énergie cinétique est disponible: un proton de $K_{\text{Lab}} \simeq 10 \text{ MeV}$ peut créer 5 MeV de matière.

2. Cas relativiste:

$$\begin{aligned} [(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2]_{\text{Lab}} &= [(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2]_{\text{CM}} \\ \text{où } (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)_{\text{CM}} &= 0, (E_2)_{\text{Lab}} = M_p, (\mathbf{p}_2)_{\text{Lab}} = 0. \text{ Alors, on a} \\ [(E_1 + M_p)^2 - (p_1)^2]_{\text{Lab}} &= (E_1 + E_2)_{\text{CM}}^2 = [E_{\text{total}}^2]_{\text{CM}} \\ [(E_1^2 + 2M_p E_1 + M_p^2) - (p_1)^2]_{\text{Lab}} &= [E_{\text{total}}^2]_{\text{CM}} \\ [2M_p E_1 + 2M_p^2]_{\text{Lab}} &= \\ 2M_p [E_1 + M_p]_{\text{Lab}} &= \\ 2M_p [E_{\text{total}}]_{\text{Lab}} &= \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{[E_{\text{total}}^2]_{\text{CM}}}{[E_{\text{total}}]_{\text{Lab}}} = 2M_p$$

et par exemple pour avoir 20 GeV dans le centre de masse ($M_p \simeq 1 \text{ GeV}$), il faut $[E_{\text{total}}]_{\text{Lab}} = \frac{(20)^2}{2(1)} = 200 \text{ GeV}$ dans le laboratoire. Dans le cas du seuil de production d'antiproton: $pp \rightarrow ppp\bar{p}$

$$\begin{aligned} E_{\text{CM}}|_{\text{seuil}} &= 4M_p \\ E_{\text{Lab}}|_{\text{seuil}} &= \frac{4^2}{2} M_p = 8M_p \end{aligned}$$

et

$$K_{\text{Lab}}|_{\text{seuil}} = (8 - 2) M_p \simeq 5.63 \text{ GeV}$$

Effet Compton



Exercice 4.8

Collision de rayons-X ($\lambda \simeq 10^{-8} \text{ cm}$) avec des électrons (une manifestation de la nature corpusculaire de la lumière). La conservation de la quantité de mouvement nous donne (voir figure 4.7)

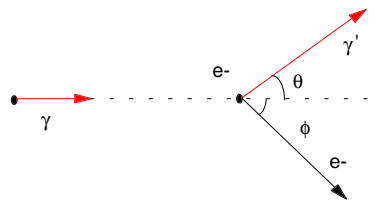


Figure 4.7 Effet Compton: Collision de rayons-X avec des électrons.

$$h\nu = h\nu' \cos \theta + \gamma v m \cos \phi$$

$$0 = h\nu' \sin \theta - \gamma v m \sin \phi$$

alors que la conservation de l'énergie requiert

$$m + h\nu = \gamma m + h\nu'.$$

On cherche ν' (θ) en éliminant v et ϕ . En posant

$$\alpha = \frac{h\nu}{m} \quad \text{et} \quad \alpha' = \frac{h\nu'}{m}$$

on a

$$\alpha = \alpha' \cos \theta + \gamma v \cos \phi$$

$$0 = \alpha' \sin \theta - \gamma v \sin \phi$$

$$1 + \alpha = \gamma + \alpha'$$

d'où on tire

$$\alpha - \alpha' = \alpha\alpha' (1 - \cos \theta)$$

soit

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{m} (1 - \cos \theta)$$

ou

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m} (1 - \cos \theta)$$

i.e. la variation de la longueur d'onde du rayon X dépend de son angle de diffusion. Ici, $\frac{h}{m} = \frac{h}{mc} =$ longueur de Compton.



5 LES REPÈRES ACCÉLÉRÉS

5.1 Rappel—Quelques problèmes en dynamique de Newton

La deuxième loi de Newton

Lorsqu'une ou plusieurs forces s'appliquent sur un corps de masse m , le mouvement de ce dernier est déterminé par l'équation

$$\mathbf{F}^{\text{res}} = m\mathbf{a} \quad (5.1)$$

où \mathbf{F}^{res} est la force résultante, i.e. la *somme vectorielle de toutes les forces appliquées* sur ce corps. Il faut aussi connaître les conditions initiales.

Il est commode de décomposer cette équation sur des axes convenablement choisis, adaptés à la géométrie du problème. Ainsi, en supposant un bloc sur un plan incliné lisse (voir figure 5.1), on aura

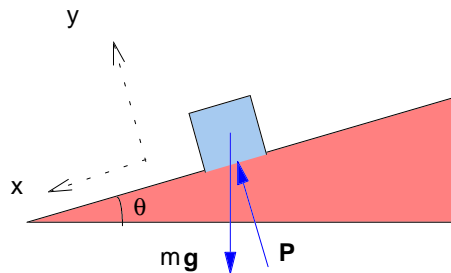


Figure 5.1 Glissement d'un bloc sur un plan incliné.

$$\text{Axe des } x : \quad mg \sin \theta = ma$$

$$\text{Axe des } y : \quad -mg \cos \theta + P = 0$$

où P , la poussée du plan sur le bloc, n'est pas égale au poids du corps comme c'est le cas sur un plan horizontal.

Le frottement sec

Si l'on pousse sur une lourde caisse placée sur un plancher horizontal rugueux, on se rend compte qu'on peut appliquer une force \mathbf{F} plus ou moins importante sans que la caisse ne bouge (voir figure 5.2). Puisqu'il n'y a pas mouvement, il y doit avoir équilibre des forces ce qui revient à dire que le plancher exerce sur la caisse une force de sens opposé à \mathbf{F} et de même grandeur : c'est ce qu'on appelle le *frottement avant glissement*. Cette force de frottement est une force *ajustable*.

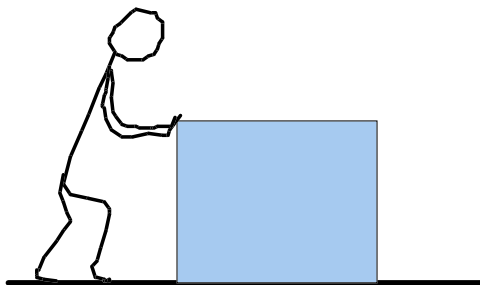


Figure 5.2 Le frottement sec.

Lorsque nous augmentons la force \mathbf{F} , nous constatons qu'à un moment donné commence le glissement. Appelons \mathbf{F}_0 la grandeur de la force, à cet instant. En première approximation, on peut considérer que \mathbf{F}_0 ne dépend que de la nature des surfaces en contact et de la force normale \mathbf{N} exercée par le plancher sur la caisse. On a donc l'équation empirique (qui résulte de l'expérience) suivante

$$\mathbf{F}_0 = \mu_s \mathbf{N} \quad (5.2)$$

où μ_s est appelé *coefficient de frottement avant glissement* (ou parfois coefficient de frottement statique). Ainsi, tant que la caisse ne bouge pas, la force de frottement a une grandeur inférieure ou égale à \mathbf{F}_0 .

Que se passe-t-il lorsque la caisse commence à glisser? On observe qu'il y a toujours une force de frottement et que celle-ci est donnée par

$$\mathbf{F}_g = \mu_g \mathbf{N}. \quad (5.3)$$

On appelle \mathbf{F}_g la force de frottement en glissement tandis que μ_g est le coefficient de frottement en glissement. Sans que cela soit une règle tout à fait générale, μ_g est plus petit que μ_s ou tout au plus égal. On sait quelle surprise cela réserve aux automobilistes lorsqu'ils bloquent les roues sur la glace plutôt que de réduire la vitesse pour empêcher de glisser: la force d'arrêt peut parfois être brusquement réduite par un facteur 2 ou 3, ce qui n'est pas négligeable.

Le mouvement circulaire

Comme son nom l'indique, le mouvement est celui d'un mobile dont la trajectoire est une circonférence. Le rayon vecteur \mathbf{r} est de longueur égale au rayon du cercle R ; la vitesse change de direction, tout en demeurant *tangente* à la trajectoire. Si l'on utilise les coordonnées polaires, on repère la position du vecteur \mathbf{r} par l'angle θ . La vitesse angulaire est alors

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$$

ou encore

$$v = \omega R.$$

Quand à l'accélération, elle est purement centripète si le mouvement est uniforme et de valeur

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \quad (5.4)$$

S'il y a une accélération angulaire α , on a en plus une accélération tangentielle

$$a_T = \alpha R \quad (5.5)$$

5.2 Les repères accélérés

Nous avons parlé précédemment des repères inertiels comme étant ceux dans lesquels s'appliquent les lois de Newton. Nous avons vu aussi que si l'on connaît un repère inertiel, tout autre repère ayant une vitesse constante par rapport au premier sera aussi inertiel. On peut se poser la question: qu'advient-il si ce repère est accéléré par rapport au premier? Sommes-nous encore capables de décrire le mouvement en nous servant des équations de Newton? Nous allons voir que si on se place dans un repère qui est accéléré par rapport à un repère inertiel, il nous faut introduire des *forces fictives* (appelées par certains *pseudo-forces* ou encore *forces inertielles*).

Malgré ces vocables qui peuvent porter à confusion, ces forces sont réelles mais elles ne peuvent être attribuées à une cause physique (par exemple à la gravité ou à l'effet du frottement ou d'un ressort). Elles n'apparaissent, en effet, que parce que le repère choisi pour décrire le mouvement n'est pas inertiel. Ce sont ces forces qui sont responsables des sensations fortes que nous éprouvons dans certains jeux d'un parc d'amusement comme les montagnes russes, par exemple. Ce sont aussi ces forces qui permettent d'interpréter certains phénomènes sur la Terre, qui est, ne l'oublions pas, un gros repère tournant; parmi ces phénomènes, mentionnons le sens de rotation des tornades, la déviation de projectiles à longue portée ou la rotation du plan du pendule de Foucault.

5.3 Repères accélérés linéairement

Prenons le cas d'un repère inertiel au repos S , et d'un repère S' subissant une accélération \mathbf{A} selon Ox . Ce repère pourrait être une auto en train d'accélérer. Supposons maintenant un objet au repos dans ce repère accéléré (voir figure 5.3). L'observateur du

repère S , voyant cet objet soumis à une accélération \mathbf{A} , tire la conclusion que cet objet est soumis à une force \mathbf{F} de grandeur $m\mathbf{A}$.

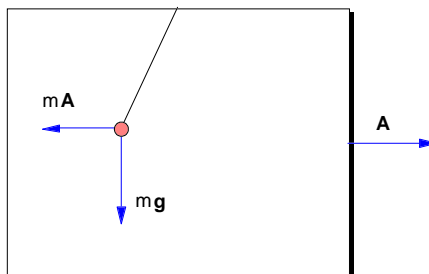


Figure 5.3 Exemple de repère accéléré linéairement.

D'autre part, l'observateur du repère S' , ne se posant pas question à savoir si son repère est inertiel ou non, voyant qu'un objet est au repos dans son repère, conclut que ce dernier est en équilibre sous l'effet de deux forces: une force (réelle ou mieux) vers l'avant de grandeur \mathbf{F} et une force (fictive) vers l'arrière de grandeur $m\mathbf{A} = \mathbf{F}$. Cet observateur se voit donc dans l'obligation d'introduire une force qui n'existe pas en réalité. Cette force fictive qui apparaît dans un repère accéléré linéairement est appelée *force de d'Alembert*.



Exemple 5.1

Un homme, debout sur une balance à ressort placée dans un ascenseur au repos, pèse 700 N. Que marque la balance si l'ascenseur monte avec une accélération de $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$? Pour l'observateur de l'ascenseur, la force vers le bas est

$$m(g + A)$$

ce qui donne

$$700 \text{ N} \cdot \frac{g + A}{g}$$

c'est-à-dire 840 N (comme valeur de $g \simeq 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$). Lorsque la vitesse redevient constante, la balance marquera 700 N tout comme au repos.

5.4 Repères en rotation: introduction

Afin de découvrir les forces qui peuvent se manifester dans un repère en rotation, nous allons prendre le cas simple suivant: une plate-forme en rotation uniforme à vitesse angulaire ω . Cela pourrait être, par exemple, un carrousel de chevaux de bois... sans les chevaux (voir figure 5.4).

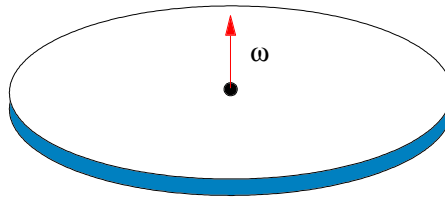


Figure 5.4 Exemple de repères en rotation.

Objet au repos par rapport au disque

Imaginons une personne, que nous appellerons Paul, au repos, debout sur le bord de cette plate-forme et analysons son attitude des points de vue d'un observateur au repos sur la Terre (observateur S) et d'un observateur S' dont le repère est fixé au carrousel. Disons tout de suite que les deux constatent que Paul n'est pas selon la verticale mais est penché vers l'axe du carrousel (voir figure 5.5).

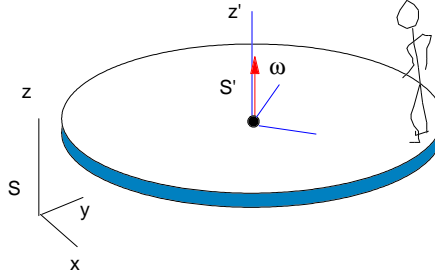


Figure 5.5 Plate-forme en rotation.

Point de vue de S

Selon l'observateur S , Paul est en mouvement circulaire uniforme. Il est donc nécessaire que s'exerce sur lui une force dirigée vers l'axe du carrousel: c'est une force centripète de grandeur

$$f = m\omega^2 R \quad (5.6)$$

où m est la masse de Paul. Cette force ne peut venir que du frottement qui s'exerce entre les pieds de Paul et la plate-forme, ce qui indique que le coefficient de frottement est suffisant pour empêcher Paul de glisser hors du disque. Pourquoi est-il penché vers l'axe et de combien? En fait, c'est que Paul doit être en équilibre de rotation autour de son centre de masse, c'est-à-dire que la somme des moments de force doit être nulle (voir figure 5.6)

$$Px - fy = 0 \quad (5.7)$$

ce qui donne un angle θ

$$\theta = \arctan \frac{x}{y} = \arctan \frac{f}{P} \quad (5.8)$$

et comme $f = m\omega^2 R$ et $P = mg$, on a

$$\theta = \arctan \frac{\omega^2 R}{g}. \quad (5.9)$$

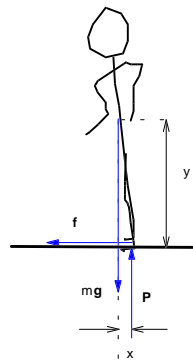


Figure 5.6 Diagramme des forces sur Paul.

**Exemple 5.2**

Application numérique: Soit $\omega = 0.5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $R = 3 \text{ m}$, l'angle θ est

$$\theta = \arctan \frac{\omega^2 R}{g} \quad \text{soit} \quad \theta \simeq 4.3^\circ$$

le coefficient de frottement minimum requis μ_s est de $\frac{\omega^2 R}{g} \simeq 0.075$ ce qui est très inférieur aux coefficients entre des surfaces comme celles considérées.

Point de vue de S'

L'observateur de S' voit Paul au repos, dans son repère. D'après la position penchée de Paul, il conclut qu'il doit s'exercer sur son centre de masse une force vers l'extérieur (force centrifuge) qui l'oblige à se pencher vers l'intérieur pour être en équilibre de rotation. Il comprend, de même, que cette force vers l'extérieur est équilibrée par une force vers l'intérieur (le frottement). Donc, pour lui, selon l'horizontale, il existe deux forces: une force réelle (le frottement) et une pseudo-force, vers l'extérieur, la force centrifuge. Cette force centrifuge a comme grandeur: $m\omega^2 R$, ce qui nous vient de la première partie de la discussion.

**Exemple 5.3**

Alors que son train roule en ligne droite sur un terrain plat à une vitesse de $150 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, un passager laissant pendre sa cravate à bout de bras, devant lui, s'aperçoit que celle-ci dévie subitement vers la droite, faisant un angle de 10° avec la verticale. Elle conserve cette position pendant 30 secondes puis revient à la verticale. Décrire quantitativement le mouvement du train pendant ces secondes. À moins d'être malicieux envers celui qui pose une telle question, on peut diffi-

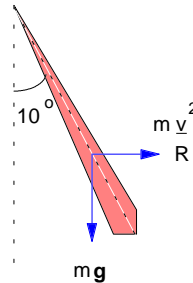


Figure 5.7 Position de la cravate du passager au virage du train.

lement imaginer autre chose que la situation suivante: le train effectue un mouvement circulaire vers la gauche, puisque c'est la force centrifuge qui tire la cravate vers la droite. La figure 5.7 nous montre l'état des forces sur la cravate et l'équilibre de ces forces nous permet de déduire le rayon de courbure de la trajectoire soit

$$\tan 10^\circ = \frac{mv^2}{R} \frac{1}{mg}$$

d'où

$$R = \frac{mv^2}{\tan 10^\circ} \cdot \frac{1}{mg} \simeq 1000 \text{ m}$$

Pendant ces 30 secondes, le train a parcouru la distance

$$d = \left(\frac{150 \times 10^3}{3600} \right) \cdot 30 \text{ m} = 1250 \text{ m}$$

soit: $d = 1250 \text{ m}$, ce qui signifie qu'il a tourné d'un angle d'environ

$$\frac{1250}{1000} \text{ rad}$$

soit 72° .

Objet en mouvement par rapport au disque

Imaginons maintenant que Paul court, à vitesse constante, à la périphérie de la plate-forme, avec une vitesse constante v' (en grandeur) et ce, dans le sens de rotation de cette plate-forme.

Point de vue de S

Pour l'observateur sur Terre S , la vitesse de Paul, en grandeur, est (voir figure 5.8)

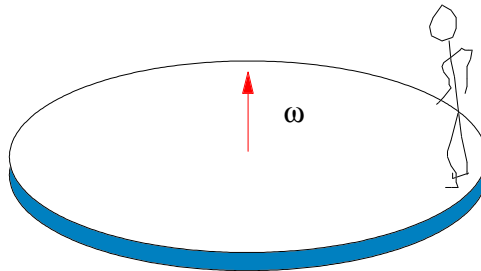


Figure 5.8 Position de Paul selon l'observateur au repos dans S .

$$v = (R\omega + v') \quad (5.10)$$

ce qui veut dire que Paul a une accélération centripète de

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega + v')^2}{R}. \quad (5.11)$$

La force de frottement dans ce cas doit être plus grande et l'angle θ' de Paul avec la verticale doit être

$$\theta' = \arctan \frac{(R\omega + v')^2}{Rg}. \quad (5.12)$$



Exemple 5.4

Application numérique : Supposons encore ici On trouve pour θ' un angle de 12° et le coefficient de frottement minimum pour que Paul puisse tenir est de 0.21, ce qui est possible pour bien des surfaces.

Point de vue de S'

L'observateur S' voit Paul en mouvement circulaire uniforme à vitesse constante v' et il sait qu'il faut pour cela une force centripète de

$$\frac{mv'^2}{R}. \quad (5.13)$$

Voyant l'attitude de Paul, il comprend qu'il s'exerce sur lui une force vers l'intérieur

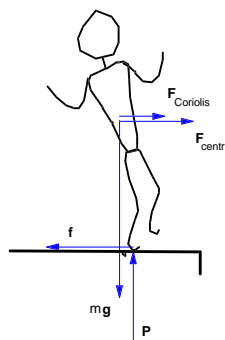


Figure 5.9 Diagramme des forces sur Paul en mouvement dans S' .

(voir figure 5.9) de

$$f = \frac{m(R\omega + v')^2}{R} \quad (5.14)$$

force exercée par le frottement. Il en déduit donc que le frottement exerce une force plus grande que celle qui lui est nécessaire et que ce surplus

$$\frac{m(R\omega + v')^2}{R} - \frac{mv'^2}{R} \quad (5.15)$$

ou encore

$$m\omega^2 R + 2mv'\omega \quad (5.16)$$

est nécessaire pour équilibrer deux forces qui tirent Paul vers l'extérieur:

1. une *force centrifuge*: $m\omega^2 R$
2. une force dite de *Coriolis*: $2mv'\omega$

Dans ce cas-ci, il y a donc, selon l'horizontale, une *force réelle* (le frottement qui agit

vers l'intérieur) et deux *pseudo-forces* qui agissent vers l'extérieur: la force centrifuge comme dans le cas précédent où Paul était au repos sur le bord du disque et une nouvelle force, la force de Coriolis, qui dépend du mouvement de Paul *par rapport au repère tournant*.

On pourrait montrer qu'il en serait de même aussi si Paul se déplaçait à une vitesse v' le long d'un rayon, *vers l'extérieur par exemple*; il y aurait encore une force centrifuge vers l'extérieur mais dans le cas de la force de Coriolis, elle agirait cette fois *perpendiculairement* à la vitesse et serait dirigée vers la droite par rapport à la direction de la vitesse. Nous allons voir d'ailleurs maintenant comment s'expriment, de façon générale, ces pseudo-forces.

Analyse des accélérations par rapport à S et à S'

Nous allons analyser, de façon un peu plus systématique, comment apparaissent les accélérations auxquelles correspondent les pseudo-forces dont nous venons de parler.

Mouvement dans une direction radiale

Supposons maintenant que l'objet se déplace dans S' à vitesse v' constante en grandeur le long d'une droite, en s'éloignant de l'axe (voir figure 5.10). On peut imaginer par exemple, que cet objet est une mouche qui se déplace sur une table tournante.

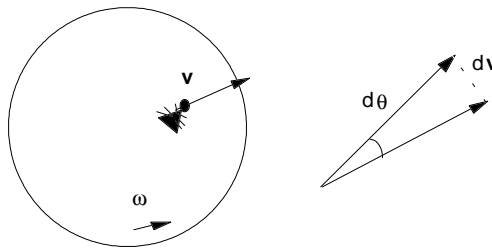


Figure 5.10 Mouvement dans la direction radiale.

Analysons son mouvement du point de vue de S , l'observateur inertiel. Nous allons voir qu'il y a deux types d'accélérations en jeu.

Accélérations qui dépendent du mouvement même du repère En effet, pour cet observateur, il y a d'abord une accélération centripète qui apparaît du seul fait qu'il y a mouvement circulaire. De plus, pendant un court instant dt , le vecteur vitesse tourne d'un angle $d\theta = \omega dt$. Ce vecteur subit donc un changement de grandeur $dv' = v' d\theta = v' \omega dt$. Ce qui donne une accélération de grandeur $v' \omega$ et de direction *perpendiculaire au déplacement et dans le sens de la rotation*.

Accélération qui dépend du mouvement par rapport au repère S' L'observateur de S constate que l'objet, en s'éloignant de l'axe, voit sa vitesse tangentielle changer ainsi

$$dv'_t = \omega dr = \omega v' dt \quad (5.17)$$

d'où une accélération de grandeur $\omega v'$, perpendiculaire au rayon et dans le sens de la rotation.

Au total, l'observateur S voit donc:

1. une accélération centripète $-\omega^2 \mathbf{r}$
2. une accélération de grandeur $2\omega v'$ dirigée vers la gauche.

Comment l'observateur du repère tournant S' interprète-t-il cela? L'objet qui se déplace est en mouvement rectiligne uniforme. Tentant d'appliquer la deuxième loi, il constate que pour se déplacer ainsi, il faut exercer une force vers l'axe pour contrebalancer une force qui s'exerce vers l'extérieur (c'est la force *centrifuge*) puis une autre force vers la gauche pour contrebalancer une force qui tire vers la droite, dont la grandeur est $2m\omega v'$. Cette pseudo-force est appelée force de *Coriolis*.

Mouvement dans une direction tangentielle

Supposons maintenant que l'objet se déplace dans S' , à vitesse constante v' en grandeur le long d'un cercle de rayon r , dans le même sens que le mouvement de la table. Voyons encore le point de vue de S .

Accélération qui dépend du mouvement du repère Pour S , la vitesse de l'objet est (voir figure 5.11)

$$\mathbf{v}' + (r\omega)\boldsymbol{\lambda}_t \quad (5.18)$$

où $\boldsymbol{\lambda}_t$ est un vecteur unitaire tangent au cercle de rayon r et dans le sens du mouvement. Pendant un intervalle de temps dt , cette vitesse tourne d'un angle ωdt ce qui entraîne

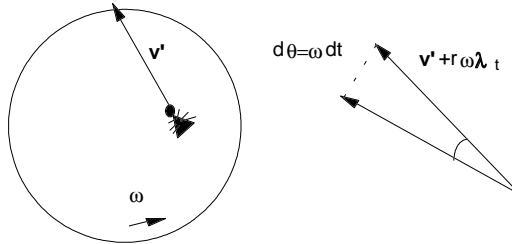


Figure 5.11 Mouvement dans une direction tangentielle.

une variation dont la grandeur est

$$|\mathbf{v}' + (r\omega)\boldsymbol{\lambda}_t| \omega dt \quad (5.19)$$

et la direction est perpendiculaire à la vitesse \mathbf{v}' , vers la gauche (figure IV-2.8) du mouvement ce qui donne une accélération

$$-(v'\omega + r\omega^2)\boldsymbol{\lambda}_r \quad (5.20)$$

Le second terme est le terme d'accélération centripète.

Accélération qui dépend du mouvement par rapport au repère Cette accélération vient du fait que la vitesse tangentielle de la table, à l'endroit occupé par la particule, change de direction lorsque la particule se déplace. Voyons en effet ce qui se passe dans le repère de la table (voir figure 5.12).

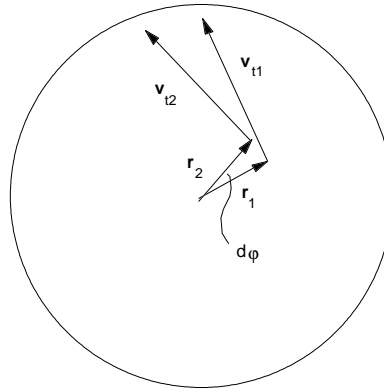


Figure 5.12 Variation du vecteur de vitesse pendant la rotation.

Pendant un intervalle de temps dt , la particule a parcouru l'arc ds sous-tendant un arc $d\varphi$, d'où $ds = r d\varphi$. Voyons la variation de vitesse de la table pendant ce court intervalle de temps. La différence entre le vecteur \mathbf{v}_{t2} et le vecteur \mathbf{v}_{t1} est donc un vecteur de grandeur

$$dv_t = v_t d\varphi \quad (5.21)$$

que l'on peut écrire aussi

$$dv_t = \frac{v_t}{r} ds \quad (5.22)$$

ou encore, en divisant par dt

$$\frac{dv_t}{dt} = \frac{v_t}{r} \frac{ds}{dt} \quad (5.23)$$

et finalement

$$\frac{dv_t}{dt} = \omega v' \implies -\omega v' \boldsymbol{\lambda}_r. \quad (5.24)$$

Le terme de droite est simplement l'accélération ressentie par la particule en changeant de position sur la table. Cette accélération de grandeur $\omega v'$ est dirigée perpendiculairement à la vitesse et vers la gauche de celle-ci.

Au total, cette particule ressentira donc:

1. une accélération centripète $-\omega^2 \mathbf{r}$
2. une accélération de grandeur $2\omega v'$ dirigée vers la gauche de la direction de son mou-

vement.

En résumé, dans les cas particuliers que nous venons de voir, il y a toujours dans le repère S' une *force centrifuge* et une *force de Coriolis à angle droit* avec le déplacement en plus, dans ces cas de mouvements prescrits, des forces de frottements qui assurent la force centripète et équilibrent la force de Coriolis, mouvements prescrits signifiant ici que les déplacements sont imposés et qu'il faut des forces *physiques* pour qu'ils se produisent comme on le veut. Dans le cas d'une mouche qui volerait à vitesse constante par rapport au sol au-dessus d'une table tournante, il n'y aurait que les forces fictives centrifuge et de Coriolis pour décrire son mouvement par rapport à la table. Il en serait de même dans le cas d'un objet au repos sur le sol; seules les forces centrifuge et de Coriolis existent dans le repère de la table tournante.

5.5 Repères en rotation (cas général)

Nous allons supposer un repère inertiel (axes OX , OY et OZ) et un repère tournant (axes Ox , Oy et Oz) avec, à un instant donné, une vitesse angulaire ω (voir figure 5.13).

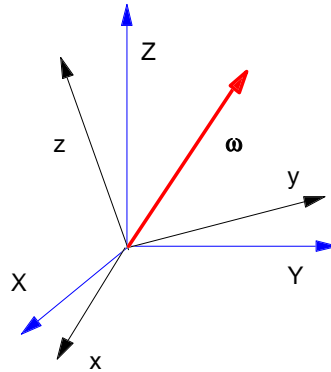


Figure 5.13 Repères en rotation.

Pour transformer la loi du mouvement d'un repère inertiel à un repère accéléré, il nous faut être capable de relier les dérivées par rapport au temps de quantités vectorielles exprimées dans chacun de ces repères. Dans le repère en mouvement, un vecteur arbitraire peut s'écrire

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

où la direction des vecteurs unitaires \mathbf{i} , \mathbf{j} et \mathbf{k} peut changer avec le temps.

Calculons la variation de ce vecteur par rapport au repère inertiel

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt} \mathbf{k}$$

$$+ A_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_z \frac{d\mathbf{k}}{dt}. \quad (5.25)$$

Voyons sur la figure 5.14 comment on peut calculer la variation des vecteurs unitaires. On a, pour le vecteur \mathbf{i} ,

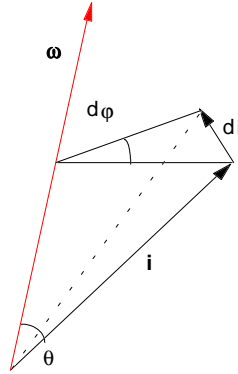


Figure 5.14 Calcul de la variation du vecteur unitaire \mathbf{i} .

$$|d\mathbf{i}| = (1 \times \sin \theta) \cdot d\varphi \quad (5.26)$$

dans une direction perpendiculaire à ω et à \mathbf{i} . Comme $d\varphi = \omega dt$, on peut écrire

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \omega \times \mathbf{i} \quad (5.27)$$

et de même pour les deux autres vecteurs unitaires.

On peut donc écrire

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t} + \omega \times \mathbf{A} \quad (5.28)$$

où le symbole δ marque une variation dans le repère non-inertiel. Comme le vecteur \mathbf{A} est quelconque, on peut considérer que (5.28) définit un opérateur

$$\left[\frac{d}{dt} \right]_I = \frac{\delta}{\delta t} + \omega \times. \quad (5.29)$$

Appliquons cet opérateur au vecteur position \mathbf{r}

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} + \omega \times \mathbf{r} \quad (5.30)$$

et de nouveau, appliquons au résultat

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} + \omega \times \mathbf{r} \right) + \omega \times \left(\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} + \omega \times \mathbf{r} \right) \\ &= \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2} + \dot{\omega} \times \mathbf{r} + \omega \times \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} + \omega \times \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (5.31)$$

et si on multiplie par la masse

$$\underbrace{m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}}_{\text{Force phys. (Repère inertiel)}} = \underbrace{m \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2} + m \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}_{\text{(Repères accéléré)}} \quad (5.32)$$

Comme le membre de gauche est égal à la résultante \mathbf{F} des forces physiques, on a

$$\mathbf{F} - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = m \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2} \quad (5.33)$$

ou encore, pour alléger l'écriture, mais n'oubliant toutefois pas que les quantités \mathbf{r} , \mathbf{v} et \mathbf{a} sont maintenant mesurées *dans le repère tournant*

$$\mathbf{F} - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = m\mathbf{a}. \quad (5.34)$$

Voyons maintenant la signification de cette équation et le sens physique de chacun des termes.

1. Le membre de gauche est la résultante de *toutes les forces ressenties par l'observateur du repère tournant*, tant les forces *réelles* que les *pseudo-forces*. Les forces réelles sont contenues dans \mathbf{F} : on peut y trouver la gravité, une force exercée par un ressort, le frottement, etc.
2. Le terme suivant ($-m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$) qui est parfois appelé *pseudo-force tangentielle* (ou encore *azimuthale*) n'existe que si le repère tournant à une accélération angulaire en raison de la présence de $\dot{\boldsymbol{\omega}}$.
3. Le terme suivant ($-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$) est la force de Coriolis; cette force n'apparaît que s'il y a mouvement (vitesse \mathbf{v}) dans le repère tournant. Elle est à la fois perpendiculaire à $\boldsymbol{\omega}$ et à \mathbf{v} . Nous verrons un peu plus loin comment se manifeste la force de Coriolis pour un objet qui se déplace sur ou près de la Terre.

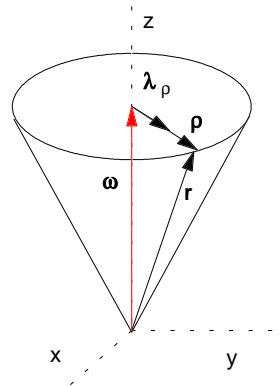


Figure 5.15 Orientation du terme $m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$.

Réécrivons le dernier terme en supposant que la rotation $\boldsymbol{\omega}$ se fait autour de l'axe Oz .

On a

$$\begin{aligned} -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= -m [\boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}\omega^2] \\ &= m\omega^2 (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}). \end{aligned}$$

Comme on peut le voir sur la figure 5.15, ce terme peut s'écrire

$$+m\omega^2 \rho \boldsymbol{\lambda}_\rho$$

où $\boldsymbol{\lambda}_\rho$ est un vecteur unitaire dans le plan xOy . C'est là la *force centrifuge*.

5.6 Mouvements observés de la surface de la Terre

Par rapport aux étoiles fixes, notre planète, la Terre, est un superbe repère tournant. On peut se demander si les effets de cette rotation sur des corps au repos ou en mouvement à la surface sont mesurables.

Dans l'équation (5.34), nous allons considérer que la vitesse angulaire de la Terre est constante (d'où $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$) et que la résultante des forces $\mathbf{F} = \mathbf{F}' + m\mathbf{g}$ où \mathbf{g} est l'accélération de la gravité d'où

$$\underbrace{\mathbf{F}' + m\mathbf{g}}_{\substack{\text{Forces réelles} \\ \text{dans le repère inertiel}}} - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \underbrace{m\mathbf{a}}_{\substack{\text{Forces réelles} \\ \text{dans le repère acc.}}} \quad (5.35)$$

Gravité apparente

Supposons-nous en un point de la Terre de latitude λ (voir figure 5.16). Nous appellerons *gravité apparente* la résultante

$$\mathbf{g}_{\text{app}} = \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (5.36)$$

Le deuxième terme est la force centrifuge dont la grandeur est

$$mR\omega^2 \cos \lambda \quad (5.37)$$

et de direction *perpendiculaire à l'axe de la Terre*. Cela signifie qu'un fil à plomb ne pointe pas, en général, vers le centre de la Terre. De même la grandeur de la pesanteur se trouve affectée à mesure qu'on va vers l'Équateur.

D'autre part, c'est en raison de cette force que notre Terre n'est pas une sphère parfaite. En effet, on dit que c'est une sphéroïde dont le rayon polaire est de 6 357 km alors que son rayon équatorial est de 6 378 km. Quant à parler de la Terre, disons que sa vitesse angulaire ω est de $0.729 \times 10^{-4} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Cette vitesse n'est pas tout à fait constante, ni en grandeur (elle diminue légèrement avec le temps), ni en direction. Cependant, ces deux effets peuvent facilement être négligés dans tous les cas que nous rencontrerons.

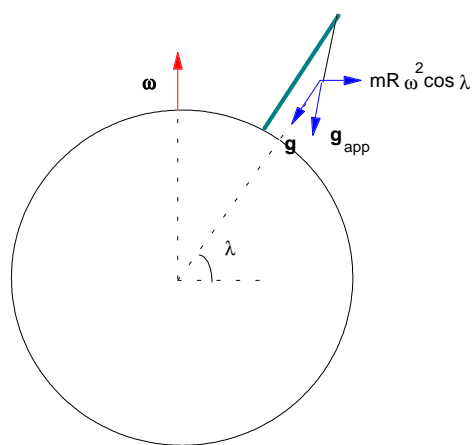


Figure 5.16 Fil à plomb situé à une latitude λ .

Mouvement d'un projectile près de la surface de la Terre

Pour étudier le mouvement d'un projectile près de la surface de la Terre, nous adapterons encore une fois l'équation (5.34) en posant:

1. $\mathbf{F}' = 0$ (nous négligeons toutes les forces *réelles* autres que la gravité, comme la résistance de l'air);
2. encore ici $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$;
3. $\mathbf{g}_{\text{app}} \approx \mathbf{g}$ d'où

$$m\mathbf{a} \approx m\mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \quad (5.38)$$

Nous travaillons dans le repère qui est illustré à la figure 5.17. L'axe Oz est la

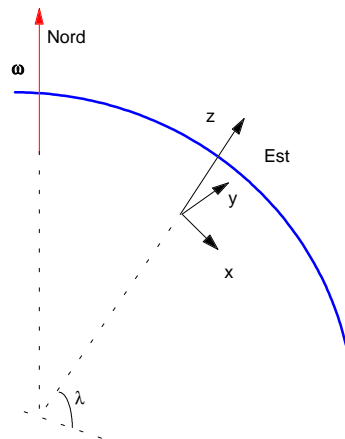


Figure 5.17 Repère terrestre.

verticale du lieu, l'axe Ox pointe vers le Sud et l'axe Oy vers l'Est. L'angle λ est la latitude du lieu (angle à partir de l'Équateur).

Dans ce repère, la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ s'écrit

$$\boldsymbol{\omega} = -\mathbf{i}\omega \cos \lambda + \mathbf{k}\omega \sin \lambda \quad (5.39)$$

La force de Coriolis $\mathbf{F}_{\text{cor}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ devient

$$\mathbf{F}_{\text{cor}} = 2m\omega [\mathbf{i}v_y \sin \lambda - \mathbf{j}(v_x \sin \lambda + v_z \cos \lambda) + \mathbf{k}v_y \cos \lambda] \quad (5.40)$$

Voyons l'effet de cette force dans l'hémisphère Nord et l'hémisphère Sud (en substituant

$\lambda \rightarrow -\lambda$) respectivement:

Direction de la vitesse	Direction de la vitesse	
	Hémisphère Nord	Hémisphère Sud
Nord ($v_x < 0$)	Est	Ouest
Est ($v_y > 0$)	Sud et vers le haut	Nord vers le haut
Sud ($v_x > 0$)	Ouest	Est
Ouest ($v_y < 0$)	Nord et vers le bas	Sud et vers le bas
Vers le haut ($v_z > 0$)	Ouest	Ouest
Vers le bas ($v_z < 0$)	Est	Est

Lors d'un mouvement pratiquement parallèle à la surface de la Terre (composante $v_z \approx 0$), le projectile est donc toujours dévié vers la droite dans l'hémisphère Nord. Si on développe l'équation (5.38) selon ses composantes, on a

$$a_x = 2\omega v_y \sin \lambda \quad (5.41)$$

$$a_y = -2\omega (v_x \sin \lambda + v_z \cos \lambda) \quad (5.42)$$

$$a_z = -g + 2\omega v_y \cos \lambda \quad (5.43)$$

Selon les conditions initiales qui nous sont données, on effectue d'abord une première intégration puis on substitue le résultat dans les équations précédentes. On néglige les termes en ω^2 avant d'intégrer ces équations pour obtenir l'équation paramétrique de la trajectoire.



Exemple 5.5

Supposons un objet qu'on laisse tomber d'une hauteur h au-dessus de la surface de la Terre. On se demande de combien il va dévier de la verticale et dans quelle direction, pour une latitude Nord donnée λ . En l'absence de la force de Coriolis, cet objet aurait une vitesse $v_z = -gt$, en prenant $t = 0$ au moment où on le laisse tomber. Reprenons les équations couplées (5.41-5.43). En première approximation, i.e. termes dominants en ω , on aura

$$a_x = 0$$

$$a_y = -2\omega v_z \cos \lambda$$

$$a_z = -g$$

La seule équation qui nous intéresse (correction d'ordre ω) est donc (5.42) qui devient

$$a_y = 2\omega (gt) \cos \lambda$$

que l'on intègre deux fois pour obtenir

$$y = \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos \lambda.$$

Le temps de chute étant $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, on a finalement

$$y = \frac{1}{3}\omega \sqrt{\frac{8h^3}{g}} \cos \lambda.$$

Pour fixer les idées, prenons $h = 1000 \text{ m}$, $\lambda = 65^\circ \text{ N}$, la vitesse $\omega = 0.7 \times 10^{-4} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $g = 9.8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. On obtient un écart y d'environ 0.6 m vers l'Est.



Exemple 5.6

Missile balistique: Supposons que nous voulions lancer un missile balistique en direction du sud (c'est-à-dire $v_{y0} = 0$), pour une portée d'environ 200 km. Pour avoir un ordre de grandeur de la vitesse de lancement, supposons un angle de lancement de 45° et utilisons la relation bien connue

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\phi}{g}$$

où R est la portée et ϕ l'angle de lancement; on obtient alors une vitesse de $1400 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ou encore $5040 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Voyons maintenant les déviations entraînées par la force de Coriolis sur la trajectoire de ce missile. Il y a en fait des contributions qui viennent du mouvement selon la verticale et aussi du mouvement selon l'horizontale. Puisque $v_{y0} = 0$, on obtient en première approximation (pour ω petit)

$$\begin{aligned} a_x &= 0 \\ a_y &= -2\omega (v_x \sin \lambda + v_z \cos \lambda) \\ a_z &= -g \end{aligned}$$

Voyons en détail ces deux contributions.

- **Selon la verticale:** Concentrons nous sur la deuxième contribution à a_y (contribution verticale). Le mouvement, sans les corrections, est donné par

$$v_z = v_0 \sin \phi - gt \quad (5.44)$$

alors que d'après (5.42)

$$\begin{aligned} a_y(1) &= -2\omega v_z \cos \lambda \\ &= -2\omega v_0 \sin \phi \cos \lambda + 2\omega gt \cos \lambda \end{aligned}$$

c'est-à-dire, donc, une contribution vers l'ouest. Si on utilise l'équation (5.44) pour la vitesse v_z et qu'on intègre deux fois, on obtient pour cette première contribution

$$y(1) = -\omega \cos \lambda \left(v_0 \sin \phi t^2 - \frac{1}{3} g t^3 \right).$$

Comme la durée du vol est $2 \frac{v_0}{g} \sin \phi$, on a finalement

$$y(1) = -\frac{4\omega}{3g^2} v_0^3 \sin^3 \phi \cos \lambda.$$

- **Selon l'horizontale:** Considérons maintenant la contribution horizontale. La vitesse est de l'ordre de $v_x = v_0 \cos \phi$ considéré constante durant le vol d'où une autre contribution vers l'Ouest, venant de l'autre terme de l'équation (5.42), soit

$$\begin{aligned} a_y(2) &= -2\omega v_x \sin \lambda \\ &= -2\omega v_0 \cos \phi \sin \lambda \end{aligned}$$

Encore une fois, après avoir substitué la vitesse selon Ox , on intègre deux fois pour obtenir

$$\begin{aligned} y(2) &= -\omega v_0 t^2 \cos \phi \sin \lambda \Big|_{t=0}^{t=\frac{2v_0}{g} \sin \phi} \\ &= -\frac{4\omega v_0^3 \sin^2 \phi}{g^2} \cos \phi \sin \lambda \end{aligned}$$

la somme de ces deux déviations donnant la déviation totale selon l'axe Oy :

$$y = y(1) + y(2)$$

comme ces deux déviations sont négatives, la déviation totale est donc vers l'Ouest. Pour les valeurs données, vitesse de lancement de $1400 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, angle de tir de 45° , rotation de la

Terre de $0.73 \times 10^{-4} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, la latitude de Québec étant 50° et $g \simeq 9.8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, on obtient approximativement 2.9 km (vers l'Ouest) ce qui est loin d'être négligeable.

Cyclones

En raison d'effets thermiques, de grandes masses d'air sont parfois mises en mouvement vers des zones de basse pression. Comme les vitesses peuvent devenir assez grandes, l'effet de la force de Coriolis se fera sentir et déviara vers la droite l'air qui descend ce qui engendrera un mouvement anti-horaire pour les cyclones qui se forment dans l'Hémisphère Nord (voir figure 5.18) et dans le sens inverse, dans l'Hémisphère Sud.

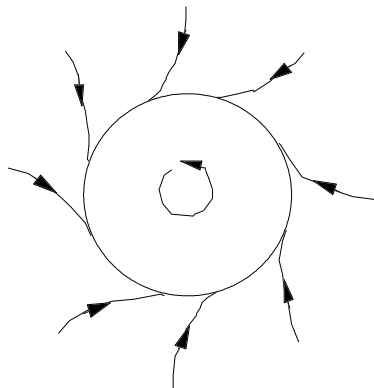


Figure 5.18 Directions des vents dans l'hémisphère Nord.

Pendule de Foucault

En 1851, dans le Panthéon à Paris, le physicien Léon Foucault fit une démonstration, à l'aide d'un pendule de 67 m de long, pour mettre en évidence le mouvement de rotation de la Terre. On peut voir de tels pendules dans le hall d'entrée de l'Organisation des Nations Unies (ONU) à New York, et assez souvent dans les grands musées scientifiques comme le *Smithsonian Institute* de Washington, par exemple.

Sans entrer dans le détail des équations, voyons de quelle façon se déplace ce pendule.

Supposons qu'un tel pendule attaché au-dessus du pôle Nord et qu'on le regarde osciller du point de suspension (voir figure 5.20). Au cours de l'oscillation le menant de A à B , il dévierait légèrement de sa trajectoire vers la droite sous l'effet de la force de Coriolis. En revenant de B à C , il en serait de même si bien que le plan d'oscillation, au bout du compte, tournait vers la droite, à vitesse constante.

On admet aisément que le plan de rotation tournera, au pôle Nord, avec une vitesse angulaire égale à celle de la Terre: *le pendule est immobile par rapport à un repère inertiel qui serait attaché à des étoiles lointaines*. La Terre tournant de la droite vers la gauche, on a ainsi l'impression que le pendule tourne dans le sens inverse.

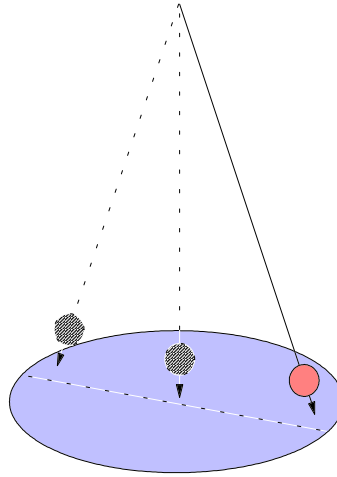


Figure 5.19 Le pendule de Foucault

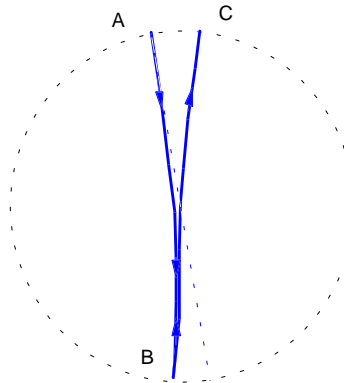


Figure 5.20 Trajectoire du pendule de Foucault dans le plan horizontal.

Examinons maintenant en détail, le mouvement du pendule. Celui-ci est déterminé par l'expression suivante:

$$\mathbf{F} - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = m\mathbf{a}.$$

Le deuxième terme est négligeable dans le cas d'un repère local S à la surface de la Terre ($\dot{\boldsymbol{\omega}} \approx 0$). Posons \mathbf{r}_c , la position du poids du pendule par rapport à son centre d'équilibre qui lui-même se trouve à la position \mathbf{R} par rapport au centre de la Terre.

$$\begin{aligned} \mathbf{F} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= \mathbf{F}' + m\mathbf{g} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_c + \mathbf{R})) \\ &= \mathbf{F}' + (m\mathbf{g} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})) - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c) \\ &= \mathbf{F}' + m\mathbf{g}_{\text{app}} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c) \end{aligned}$$

et puisque $\mathbf{r}_c \ll \mathbf{R}$, on peut écrire

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}' + m\mathbf{g}_{\text{app}} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (5.45)$$

où la tension dans le fil, \mathbf{F}' , combiné à la gravité apparente, soit le terme $\mathbf{F}' + m\mathbf{g}_{\text{app}}$, sont responsables du mouvement de bascule du pendule. Le reste de l'accélération du poids dans le repère à la surface de la Terre sera donc uniquement due à la force de Coriolis

$$m\mathbf{a}_P = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

qui est dirigée perpendiculairement à $\boldsymbol{\omega}$ et à \mathbf{v} , ce qui se traduit par une trajectoire telle qu'illustrée à la figure 5.20 et une fréquence de précession du pendule de Foucault, ω_F . Négligeons pour le moment le mouvement vertical du pendule, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y \\ \boldsymbol{\omega} &= -\mathbf{i}\omega \cos \lambda + \mathbf{k}\omega \sin \lambda \end{aligned}$$

et

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\mathbf{i}v_y\omega \sin \lambda + \mathbf{j}v_x\omega \sin \lambda - \mathbf{k}v_x\omega \cos \lambda.$$

Dans le plan xy , l'accélération est perpendiculaire à \mathbf{v} ce qui imprime un mouvement circulaire à la trajectoire avec une vitesse de précession

$$\omega_F = -\omega \sin \lambda \mathbf{k}$$

où λ est la latitude et le signe indique que dans S' la direction du mouvement de précession est dans le sens horaire.

Il est facile de se convaincre qu'au Pôle Nord ($\lambda = 90^\circ$) la fréquence de précession est $\omega_F = -\omega \sin \lambda$ alors qu'à l'équateur, il n'y a aucune précession. À la latitude de Québec, le plan d'un tel pendule tourne d'environ 15° à l'heure.



6 DYNAMIQUE DES SOLIDES

Dans ce chapitre, nous verrons comment s'appliquent les lois de Newton à des ensembles de particules. Ces ensembles peuvent tout aussi bien être constitués de particules indépendantes les unes des autres, ou encore interagissant entre elles, ou encore, dans le cas du corps rigide, astreintes à demeurer à des distances constantes l'une de l'autre.

6.1 Dynamique d'un ensemble de particules

Nous allons supposer un ensemble de particules de masses m_1, m_2, \dots . Ces particules peuvent être les éléments d'un corps plus grand (ce sera le cas du corps rigide) ou tout simplement être séparées l'une de l'autre (cas du mouvement planétaire). Nous allons supposer que les forces qui agissent entre ces particules satisfont aux conditions suivantes:

1. Les forces qui s'exercent entre un couple donné de particules sont égales en grandeur et opposées en direction.
2. Ces forces sont parallèles à la droite qui joint ces particules (e.g. ceci exclut la force magnétique).

Autrement dit, si \mathbf{F}_{12} est la force exercée sur la particule 1 par la particule 2 et que \mathbf{F}_{21} est la force exercée sur 2 par 1, on a d'après le premier énoncé: $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Le deuxième énoncé précise que ces forces sont sur une même droite, ce qui n'est pas toujours le cas.

On suppose aussi qu'il existe des forces qui s'exercent sur ces particules, forces dont l'origine est en dehors du système. Ce qui signifie que sur la particule i , la force résultante sera

$$\mathbf{F}_i = \underbrace{\sum_j \mathbf{F}_{ij}}_{\text{Forces entre particules}} + \underbrace{\mathbf{F}_i^{ext}}_{\text{Force externe}} \quad (6.1)$$

d'où, pour la deuxième loi de Newton

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i = \sum_j \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{ext}. \quad (6.2)$$

Centre de masse. Conservation de l'impulsion

La masse totale du système étant donnée par

$$M = \sum_i m_i \quad (6.3)$$

et la position du *centre de masse* par

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M} \quad (6.4)$$

on peut écrire

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = M \ddot{\mathbf{R}} = \underbrace{\sum_i \sum_j \mathbf{F}_{ij}}_0 + \underbrace{\sum_i \mathbf{F}_i^{ext}}_{\mathbf{F}^E}. \quad (6.5)$$

Le dernier terme est la résultante \mathbf{F}^E des forces externes appliquées sur le système tandis que le deuxième terme est nul en raison des hypothèses faites sur les forces internes; en fait chacune des forces internes intervient deux fois mais avec un signe opposé. Il reste donc

$$M \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^E. \quad (6.6)$$

Physiquement, cette équation signifie que peu importe l'interaction entre les particules, le centre de masse du système va se déplacer comme une particule unique de masse M sur laquelle seraient appliquées l'ensemble des forces externes.

S'il n'y a pas de forces externes appliquées sur ce système, l'équation (6.6) devient $M \ddot{\mathbf{R}} = 0$ ce qui s'écrit aussi

$$M \dot{\mathbf{R}} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{P} = \text{const.} \quad (6.7)$$

C'est la *loi de conservation de l'impulsion* pour un système de particules.

Notion de moment cinétique. Conservation du moment cinétique

Le *moment cinétique* de la particule i étant défini comme $\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i$ et la dérivée première étant $\dot{\mathbf{l}}_i = \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{P}}_i + \dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ (ce dernier terme étant nécessairement nul), on a, en tenant compte de l'équation (6.2)

$$\dot{\mathbf{l}}_i = \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{P}}_i = \sum_j \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \underbrace{\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ext}}_{\text{torque } \tau_i}. \quad (6.8)$$

Le dernier terme est le *moment des forces externes* sur la particule i , ce qu'on appelle parfois le *torque* τ_i ; de plus, on définit le *moment cinétique total du système* comme $\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_i$. Ainsi l'équation (6.8) devient

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_i \sum_j \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \sum_i \boldsymbol{\tau}_i. \quad (6.9)$$

On peut montrer facilement que le terme de double sommation est nul. Prenons simplement les termes $i = 2, j = 1$ et $i = 1, j = 2$

$$\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{21} \quad (6.10)$$

mais comme $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, on a

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}_{12}. \quad (6.11)$$

Le vecteur entre les parenthèses est colinéaire au vecteur force interne; le produit vectoriel est donc nul. Il en est de même pour tous les autres termes. L'équation (6.9) devient donc

$$\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i \quad (6.12)$$

étant entendu ici que $\boldsymbol{\tau}$ représente la somme des moments des forces externes.

Si la résultante des moments de forces externes est nulle, on a

$$\mathbf{L} = \text{const.} \quad (6.13)$$

ce qui est la *loi de conservation du moment cinétique total*. Cette loi de conservation est d'une extrême utilité, s'appliquant tout aussi bien aux galaxies, au mouvement planétaire qu'aux atomes et aux noyaux.

L'énergie cinétique d'un système de particules

L'énergie cinétique totale d'un système de particules est donnée par la somme des énergies cinétiques individuelles, soit

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{m_i}{2} (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i). \quad (6.14)$$

Comme on le voit sur la (voir figure 6.1), on a

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i \quad (6.15)$$

d'où pour la dérivée par rapport au temps

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_i. \quad (6.16)$$

L'expression de l'énergie cinétique devient donc

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum m_i (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i V^2 + \sum_i m_i (\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}'_i) + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2 \\ &= \frac{1}{2} M V^2 + \mathbf{V} \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}'_i + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2 \end{aligned} \quad (6.17)$$

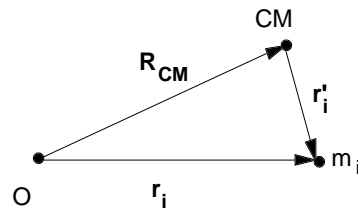


Figure 6.1 Position de la particule de masse m_i dans le système S et dans le système du centre de masse.

En utilisant l'équation (6.15), on a

$$\sum m_i \mathbf{r}'_i = \sum m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \quad (6.18)$$

$$= \sum m_i \mathbf{r}_i - M\mathbf{R} = 0 \quad (6.19)$$

en raison de la définition même du centre de masse. La dérivée du terme de gauche étant donc nulle, ($\sum m_i \mathbf{r}'_i = 0 \Rightarrow \sum m_i \mathbf{v}'_i = 0$) l'expression (6.18) est ramenée à

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2 \quad (6.20)$$

ce qui signifie que l'énergie cinétique totale d'un système de particules est égale à la somme de l'énergie cinétique du centre de masse et de l'énergie cinétique de toutes les particules *par rapport au centre de masse*.

6.2 Le corps rigide: Introduction

Le corps rigide est un bel exemple d'un ensemble de particules; celles-ci demeurent à des distances constantes l'une de l'autre qu'il y ait ou non des forces externes ce qui signifie que le corps ne change pas de forme pendant le mouvement. C'est là évidemment une idéalisation car il n'y a pas, à proprement parler, de vrai corps rigide. Cela fait l'objet d'un autre domaine de la physique: l'élasticité. Toutefois, dans des limites que nous nous imposerons au besoin, les corps dont nous allons analyser le mouvement seront des ensembles de particules rigidement liées.

Il existe deux types de mouvement particuliers au corps rigide: la *translation* et la *rotation*. On dit d'un corps rigide qu'il effectue un mouvement de *translation* lorsque toutes ses parties se déplacent sur des trajectoires parallèles; ainsi une droite qui joint deux points quelconques aura toujours une position parallèle à sa position initiale (voir figure 6.2). On parle de *rotation autour d'un axe* lorsque toutes les particules décrivent des trajectoires circulaires autour d'une ligne appelée axe de rotation. L'axe peut être fixe ou non par rapport au corps.

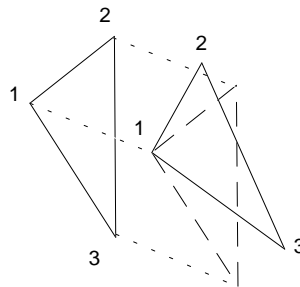


Figure 6.2 Rotation d'un corps solide.

Le mouvement le plus général d'un corps rigide peut toujours être ramené à une combinaison de translation et de rotation: on peut toujours trouver un système de référence

en translation dans lequel le corps aura un mouvement de rotation seulement. Comme nous l'avons vu dans l'équation (6.6), soit

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^E$$

le mouvement du centre de masse est identique à celui qu'aurait une particule unique, de masse M , soumise à la résultante des forces externes appliquées sur le corps rigide. Dans ce chapitre, c'est plutôt le mouvement de rotation autour d'un axe qui retiendra notre intérêt.

Rotation d'un corps rigide autour d'un axe fixe

Nous allons considérer un corps rigide tournant autour d'un axe Oz avec la vitesse angulaire ω (voir figure 6.3). Chacune de ses particules décrit un cercle dont le centre est sur l'axe Oz . La particule P_i , par exemple, décrit un cercle de rayon $R_i = \overline{M_i P_i}$ avec la vitesse

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \quad (6.21)$$

où \mathbf{r}_i est le vecteur position par rapport à l'origine O . La grandeur de la vitesse est donc $v_i = \omega R_i$. Le moment cinétique de cette particule par rapport à l'origine O est (voir

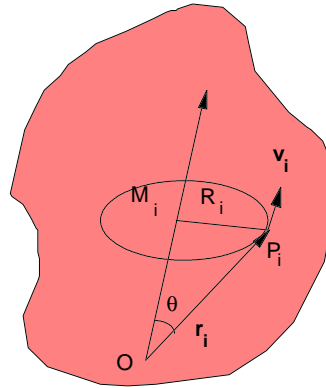


Figure 6.3 Un corps rigide tournant autour d'un axe Oz avec la vitesse angulaire ω .

figure 6.3)

$$\mathbf{l}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i. \quad (6.22)$$

Sa direction est perpendiculaire au plan déterminé par les vecteurs \mathbf{r}_i et \mathbf{v}_i , se trouvent ainsi dans le plan déterminé par le vecteur \mathbf{r}_i et l'axe Oz . Sa grandeur est $m_i r_i v_i$ et sa composante parallèle à l'axe de rotation est

$$m_i (r_i \sin \theta_i) (\omega R_i)$$

ou encore

$$(l_i)_z = m_i R_i^2 \omega. \quad (6.23)$$

La composante du moment cinétique total selon l'axe Oz est donc

$$L_z = \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega \quad (6.24)$$

et la quantité entre parenthèse est appelée *moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation Oz* et notée I , d'où

$$L_z = I\omega. \quad (6.25)$$

Le moment cinétique total $\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_i$ n'est **pas**, *en général*, parallèle à l'axe de rotation ce qui signifie qu'en général le moment d'inertie ne sera pas un scalaire. Nous reviendrons sur cette question plus loin. Dans ce chapitre, à moins d'avis contraire, le vecteur \mathbf{L} sera parallèle au vecteur $\boldsymbol{\omega}$, c'est-à-dire

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \quad (6.26)$$

où I est une quantité scalaire.

L'énergie cinétique du corps rigide de la figure 6.3 s'écrit

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega^2 \quad (6.27)$$

ou encore

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (6.28)$$

On peut noter, dans les expressions (6.26) donnant le moment cinétique et (6.28) pour l'énergie cinétique, que le moment d'inertie joue un rôle analogue à la masse m dans les expressions qu'on retrouve en dynamique soient $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$ et $T = \frac{1}{2}mv^2$.

Moments d'inertie de divers corps

Dans les calculs habituels du moment d'inertie, il faut remplacer la sommation sur plusieurs particules par une intégration sur l'ensemble du corps, d'où

$$I = \int R^2 dm \quad (6.29)$$

où dm est un élément de masse que l'on exprime habituellement par le produit de la densité ρ et de la quantité différentielle appropriée (longueur, surface ou volume). Il est important de se rappeler que R est la distance *perpendiculaire* de l'élément de masse à l'axe de rotation.

1. *Tige mince*

(a) *Rotation par rapport à l'extrémité* (voir figure 6.4a): En supposant que la densité linéaire est uniforme, l'élément de masse s'écrit $dm = \rho dx$, la masse M et le

moment d'inertie I sont

$$M = \int_0^a \rho dx = \rho a$$

$$I = \int_0^a x^2 \rho dx = \frac{1}{3} \rho a^3 = \frac{1}{3} M a^2.$$

(b) *Rotation par rapport au centre* (voir figure 6.4b):

$$I = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 \rho dx = \frac{1}{12} \rho a^3 = \frac{1}{12} M a^2.$$

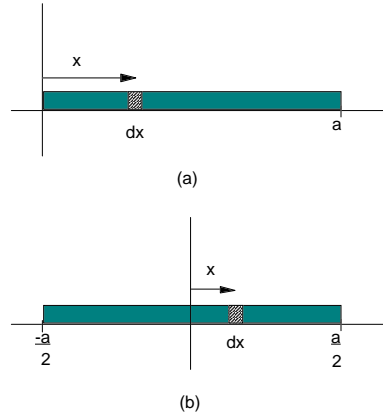


Figure 6.4 Tige mince: Rotation par rapport à l'extrémité (a) et au centre (b) respectivement.

2. Anneau circulaire

Comme la distribution de matière est uniforme autour de l'axe et qu'il y a symétrie, l'élément de masse s'écrit $dm = \rho d\theta$, la masse M et le moment d'inertie I sont

$$M = \int_0^{2\pi} \rho d\theta = 2\pi\rho$$

$$I = \int_0^{2\pi} R^2 \rho d\theta = \int_0^{2\pi} R^2 \frac{M}{2\pi} d\theta$$

$$= MR^2.$$

où R son rayon de l'anneau.

3. Disque circulaire

Il y a avantage ici à travailler en coordonnées polaires et à prendre comme élément de masse un anneau mince de rayon r et d'épaisseur dr soit une densité par unité de surface constante ρ ,

$$dm = \rho 2\pi r dr$$

Alors la masse du disque est

$$M = \int_0^R \rho 2\pi r dr = \pi \rho R^2.$$

Le moment d'inertie dans ce cas s'écrit donc (voir figure 6.5)

$$I = \int_0^R \rho r^2 2\pi r dr = 2\pi \rho \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} M R^2.$$

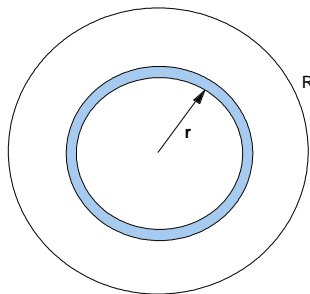


Figure 6.5 Moment d'inertie d'un disque.

4. *Sphère*

Dans ce cas, nous allons supposer que la sphère est constituée de disques minces dont l'axe est celui par rapport auquel nous voulons calculer le moment d'inertie soit Oz (voir figure 6.6). L'élément de volume d'un disque de rayon y étant $\pi y^2 dz$, son élément de masse est

$$dm = \rho \pi y^2 dz$$

et la masse de la sphère est

$$\begin{aligned} M &= \int_{-a}^a \rho \pi y^2 dz = \rho \pi \int_{-a}^a (a^2 - z^2) dz \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \rho \end{aligned}$$

comme il se doit, Par ailleurs, le moment d'inertie associé au disque de rayon y est $\frac{1}{2} y^2 dm$ alors

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a}^a \frac{1}{2} \pi \rho y^4 dz \\ &= \frac{1}{2} \pi \rho \int_{-a}^a (a^2 - z^2)^2 dz \\ &= \frac{8}{15} \pi \rho a^5. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$I = \frac{2}{5} M a^2.$$

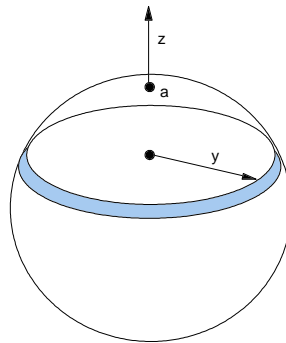


Figure 6.6 Moment d'inertie d'une sphère.

Rayon de giration

On remarque que les moments d'inertie sont tous de la forme

$$\text{masse de l'objet} \times (\text{dimension caractéristique})^2. \quad (6.30)$$

On introduit alors une quantité k , appelée le *rayon de giration*, telle que

$$I = k^2 M. \quad (6.31)$$

Ainsi, il est souvent plus pratique de caractériser les objets par leur rayon de giration.

objet	k
disque	$\frac{1}{\sqrt{2}} R$
anneau	R
sphère	$\sqrt{\frac{2}{5}} R$

Théorème des axes parallèles

Considérons le moment d'inertie d'un corps autour d'un axe, disons Oz (voir figure 6.7)

$$I = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (6.32)$$

Comme

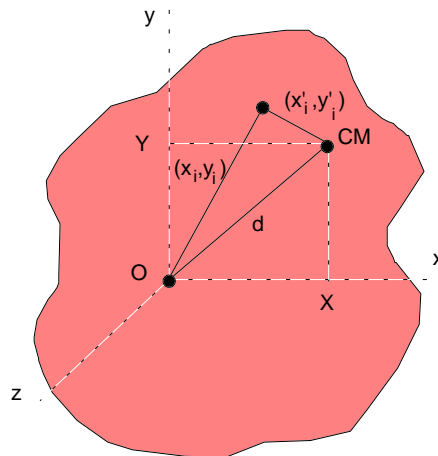


Figure 6.7 Corps solide en rotation autour de l'axe des z .

$$\begin{aligned} x_i &= X + x'_i \\ y_i &= Y + y'_i \end{aligned}$$

l'expression (6.32) s'écrit

$$\begin{aligned}
I = & \underbrace{\sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2)}_{I \text{ p/r au c.m.}} + \underbrace{\sum m_i (X^2 + Y^2)}_{M \cdot d^2} + 2X \underbrace{\sum mx_i'}_{=0} \\
& + 2Y \underbrace{\sum my_i'}_{=0}
\end{aligned} \tag{6.33}$$

le premier terme étant le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle à l'axe Oz mais passant par le centre de masse; le deuxième terme est égal à la masse totale multipliée par le carré de la distance entre l'axe Oz et l'axe parallèle passant par le centre de masse ($M \cdot d^2$). Les deux derniers termes sont nuls d'après la définition même du centre de masse. Il reste donc

$$I = I_{CM} + M \cdot d^2. \tag{6.34}$$

C'est là l'expression du *théorème des axes parallèles*; si l'on veut le moment d'inertie d'un corps autour d'un axe et qu'on connaît le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle passant par le centre de masse, il suffit d'ajouter à cette dernière quantité M fois le carré de la distance entre les deux axes. On peut le vérifier dans le cas du moment d'inertie de la tige mince calculé au début de ce paragraphe. En effet,

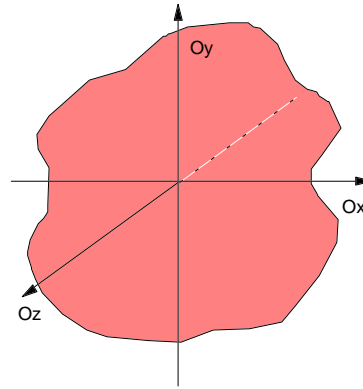
$$I_{extr} = \frac{1}{12}Ma^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 M = \frac{1}{3}Ma^2. \tag{6.35}$$

Théorème des plaques minces (ou des axes perpendiculaires)

Supposons une plaque mince de forme arbitraire (voir figure 6.8). Par un point O de cette plaque passe l'axe Oz , perpendiculaire à la plaque. Considérons le moment d'inertie I_z de cette plaque autour de l'axe Oz . Il vaut, par définition

$$I_z = \int r^2 dm. \tag{6.36}$$

Comme

Figure 6.8 Plaque mince en rotation autour de l'axe des z .

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (6.37)$$

on peut écrire

$$I_z = \int x^2 dm + \int y^2 dm. \quad (6.38)$$

Comme l'objet est plat, le premier terme est tout simplement I_y tandis que le second est I_x , de telle sorte que

$$I_z = I_x + I_y \quad (\text{pour une plaque mince}). \quad (6.39)$$

Ce théorème peut être fort utile dans le calcul des moments d'inertie; on doit se rappeler qu'il ne s'applique qu'à des objets minces.



Exemple 6.1

Supposons un disque de masse M et de rayon R (voir figure 6.9). On veut connaître son moment d'inertie par rapport à la droite DD' qui est parallèle à un diamètre et tangente au disque. On sait que par rapport à un axe perpendiculaire passant par le centre du disque, le moment d'inertie est

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{1}{2}MR^2 \\ &= I_x + I_y = 2I_y \end{aligned}$$

Appliquons le théorème des plaques minces, ce qui nous donne le moment d'inertie par rapport à un diamètre, soit: $I = I_y = \frac{1}{4}MR^2$. Appliquons enfin le théorème des axes parallèles avec $d = R$, d'où

$$\begin{aligned} I_{DD'} &= I + MR^2 \\ &= \frac{1}{4}MR^2 + MR^2 = \frac{5}{4}MR^2. \end{aligned}$$

On voit ainsi que l'usage combiné des deux théorèmes peut nous éviter de calculer des moments d'inertie.

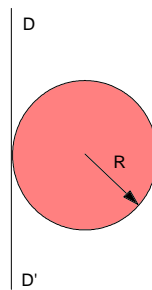


Figure 6.9 Disque de masse M et de rayon R en rotation par rapport à l'axe DD' .

Équation de mouvement et cinématique de rotation

Nous avons vu précédemment que pour un ensemble de particules, on avait

$$\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\tau} \quad (6.40)$$

où \mathbf{L} est le moment cinétique total et $\boldsymbol{\tau}$ le moment des forces externes. Cette équation est valide dans le cas d'un corps rigide et, si nous considérons le cas d'un corps qui tourne autour d'un axe tel que l'équation $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ est valide, ce qui est le cas dans ce cours, alors

$$I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \quad (6.41)$$

ou encore

$$I\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\tau}$$

où $\boldsymbol{\alpha}$ est l'accélération angulaire.

La similitude entre l'équation du mouvement de translation, c'est-à-dire $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ et l'équation (6.41) est parfaite. Dressons un tableau comparatif des quantités en jeu:

<i>Particule en mouvement rectiligne</i>	<i>Corps rigide en rotation autour d'un axe fixe</i>
$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$
$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$	$\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}$
$T = \frac{1}{2}mv^2$	$T = \frac{1}{2}I\omega^2$

En raison de cette similitude, on admet facilement que seront valides les équations suivantes permettant de décrire le mouvement de rotation d'un corps rigide autour d'un axe: Pour une accélération angulaire constante α

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (6.42)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2. \quad (6.43)$$

Conservation du moment cinétique. Quelques exemples

En particulier, si $\boldsymbol{\tau} = 0$, on doit avoir conservation de la quantité $I\boldsymbol{\omega}$. Dans le cas d'un corps rigide à *géométrie variable*, cela veut dire que si I augmente, la quantité $\boldsymbol{\omega}$ doit diminuer et *vice versa*. On connaît bien le cas des vrilles en patinage de fantasia et celui du plongeur du haut-vol qui se replie sur lui-même pour augmenter sa vitesse de rotation.

6.3 Mouvements combinés de translation et de rotation

Les amateurs de quilles ou de billards savent qu'une boule peut glisser sans pratiquement rouler ou encore rouler presque sur place sans pratiquement se déplacer. Ces observations nous serviront comme point de départ pour réfléchir à la question suivante: qu'est-ce qui relie la translation et la rotation ou encore le roulement et le glissement?

Dans ce qui va suivre, nous ne considérerons que les forces dans le plan horizontal et nous négligerons la résistance de l'air.

Frottement, glissement et roulement

Soit le problème suivant: on lance une boule de quille sans lui donner de mouvement de rotation. Sur la figure 6.10, on voit la boule juste au moment où elle va toucher le plancher. La vitesse (horizontale) de son centre de masse est alors V . Tout de suite après le contact, il y a nécessairement glissement puisque la boule n'est pas en rotation et que tous ses points ont alors la même vitesse V .

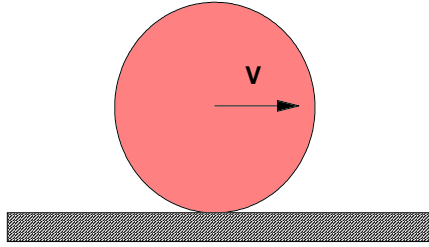


Figure 6.10 Boule de quille en mouvement.

Écrivons ce que sont alors les équations du mouvement, tout juste après le contact (voir figure 6.11). La seule force horizontale en jeu est la force de frottement en glissement f_g , d'où

$$-f_g = Ma \quad (6.44)$$

et pour la rotation (moment de force)

$$f_g R = I\alpha \quad (6.45)$$

d'où pour les vitesses en fonction du temps

$$v = V - \frac{f_g}{M}t \quad (6.46)$$

$$\omega = \frac{f_g R}{I}t. \quad (6.47)$$

Cette dernière équation nous donne la vitesse tangentielle de la boule, soit

$$v_t = R\omega = \frac{f_g R^2}{I}t. \quad (6.48)$$

À l'instant où cette vitesse sera égale à la vitesse du centre de masse, la vitesse de la boule au point de contact sera nulle; le glissement cessera et la boule commencera à rouler sans glisser. À partir de ce moment, le frottement n'est plus nécessaire pour maintenir la rotation.

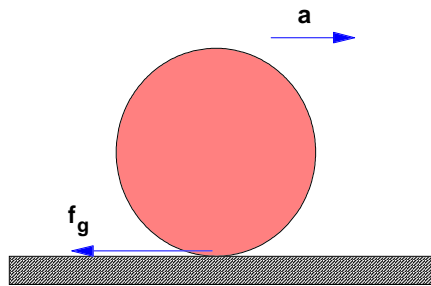


Figure 6.11 Boule de quille en mouvement.

En principe, la boule peut rouler indéfiniment (on a posé que la résistance de l'air était négligeable); il existe toutefois une *résistance de roulement* (*rolling friction*) qui est, en fait, au point de déformations tant de la boule que du plancher, au point de contact. Ces déformations, même si elles paraissent minimes à première vue, dissipent peu à peu l'énergie cinétique et la boule finit par s'arrêter.

Ce qu'il est important de retenir, c'est que la condition pour qu'il y ait *roulement sans glissement*, est

$$v_{CM} = R\omega. \quad (6.49)$$

6.4 Dynamique de la rotation

Nous allons voir, sur quelques exemples, comment utiliser les équations du mouvement, soit $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$ et $\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}$ pour résoudre des problèmes où il y a rotation.



Exemple 6.2

Prenons le cas d'un disque de rayon R et de masse M . On suppose qu'il peut tourner librement autour d'un axe passant par son centre. Quelle est l'accélération angulaire de ce disque si on attache une masse m à une corde enroulée autour (voir figure 6.12)?

Écrivons d'abord l'équation de mouvement de la masse m . Soit T , la tension dans la corde,

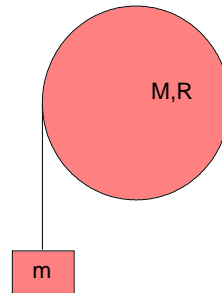


Figure 6.12 Disque de rayon R et de masse M autour duquel est enroulée une corde qui est reliée à une masse m .

$$mg - T = ma.$$

D'autre part, l'équation de mouvement angulaire du disque s'écrit ($\tau = I\alpha$)

$$TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha.$$

Ici, la condition de roulement sans glissement ($a = \alpha R$) s'applique. Si on élimine T de ces deux équations, on a

$$\alpha = \frac{mg}{\left(m + \frac{1}{2}M\right)R}$$

**Exemple 6.3**

Supposons un disque de masse M et de rayon R qui roule sans glisser sur un plan incliné d'angle θ (voir figure 6.13). Dans un tel mouvement, l'axe de rotation se déplace mais ne change pas de direction. Écrivons les équations du mouvement: Pour la translation du CM,

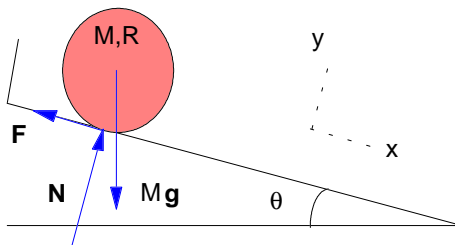


Figure 6.13 Disque sur un plan incliné.

$$M\ddot{x}_{CM} = Mg \sin \theta - F \quad \text{et} \quad M\ddot{y}_{CM} = -Mg \cos \theta + N. \quad (6.50)$$

Comme le corps reste en contact avec le plan, $y_{CM} = \text{const.}$ d'où une accélération nulle selon Oy , i.e. $\ddot{y}_{CM} = 0$. La force de poussée du plan sur le disque N est donc égale à $Mg \cos \theta$. La seule force qui exerce un moment autour du CM du disque est la force de frottement F . L'équation de la rotation s'écrit donc

$$I\alpha = FR.$$

Il reste maintenant à établir une relation entre la rotation et le mouvement du CM. Cela va venir de la condition sans glissement. En effet, si le disque ne glisse pas, c'est que la vitesse du CM est égale à la vitesse du point de contact, donc de la vitesse tangentielle du disque d'où

$$\dot{x}_{CM} = R\omega$$

$$\ddot{x}_{CM} = R\alpha$$

donc

$$F = \frac{I\alpha}{R} = \frac{I\ddot{x}_{CM}}{R^2}$$

et

$$M\ddot{x}_{CM} = Mg \sin \theta - \frac{I\ddot{x}_{CM}}{R^2}.$$

Cette dernière équation nous permet donc d'éliminer α et de trouver la quantité cherchée, soit

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{CM} &= \frac{Mg \sin \theta}{M + \frac{I}{R^2}} \\ &= \frac{2g \sin \theta}{3}. \end{aligned}$$

6.5 Corps rigide et conservation de l'énergie

Connaissant les succès qu'on obtient en appliquant le principe de conservation de l'énergie, on peut avoir l'idée de chercher comment on pourrait appliquer ce principe au mouvement du corps rigide. Pour ce qui est de l'énergie cinétique, il n'y a pas trop de problème; il doit y avoir une énergie de translation du centre de masse ($\frac{1}{2}Mv^2$) et une

énergie de rotation ($\frac{1}{2}I\omega^2$). De plus, il ne doit pas y avoir de forces dissipatrices qui agissent sur le système.

Prenons un exemple, celui d'un cylindre qui roule sur un plan incliné (voir figure 6.14).

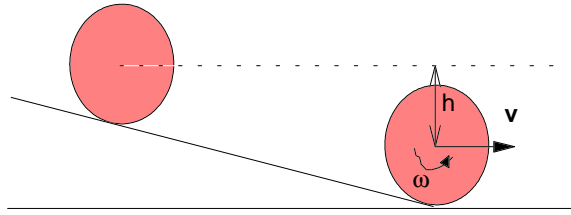


Figure 6.14 Cylindre partant du repos sur un plan incliné.

En prenant le bas du plan incliné comme niveau zéro de l'énergie potentielle, on peut écrire

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (6.51)$$

Comme le cylindre roule sans glisser, on a une relation entre la vitesse v du centre de masse et la vitesse angulaire ω soit

$$v = R\omega.$$

Alors, connaissant le moment d'inertie d'un cylindre ($I_{cyl} = \frac{1}{2}MR^2$),

$$\begin{aligned} Mgh &= \frac{1}{2} \left(M + \frac{I}{R^2} \right) v^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}M \right) v^2 \end{aligned}$$

on trouve aisément

$$v = \sqrt{\frac{4gh}{3}} \quad (6.52)$$



Remarque 7

Comme on a roulement sans glissement, il y a une force de frottement statique entre le cylindre et le plan incliné. Comme une force de frottement dissipe habituellement de l'énergie, a-t-on le droit d'appliquer le principe de conservation de l'énergie?

Il est peut-être approprié à ce stade de distinguer deux type de forces de frottement celles que nous appellerons la force de frottement *statique* et la force de frottement *cinétique* (la même distinction s'applique pour les coefficients de frottement). Le frottement *cinétique* (ou avec glissement) qui dissipe de l'énergie est celui que l'on rencontre lorsque deux surfaces glissent l'une par rapport à l'autre. Il suffit de se frotter les mains ensemble pour ressentir la chaleur qui provient de la dissipation d'énergie. Par contre, c'est le frottement *statique* (ou sans glissement) qui est en jeu lorsqu'un objet roule sur un

plan incliné, par exemple, les surfaces ne se déplacent pas l'une par rapport à l'autre. Au niveau microscopique, lorsqu'il y a glissement, les aspérités des surfaces s'accrochent et se brisent, d'où un dégagement de chaleur. Dans le cas où les surfaces ne glissent pas, et c'est justement ce qui nous intéresse, les aspérités ne font que s'accrocher sans se briser, ce qui dissipe peu ou pas d'énergie.

6.6 Percussion et rotation

Dans certains cas, les forces qui agissent sur un objet peuvent être très intenses mais n'agir que pendant un temps très court (voir figure 6.15); on parle alors de *choc*. Il suffit de penser à la balle que frappe une raquette de tennis ou le bâton de base-ball, par exemple. Dans tous ces cas, il est opportun d'avoir recours à la deuxième loi de Newton sous forme intégrale.

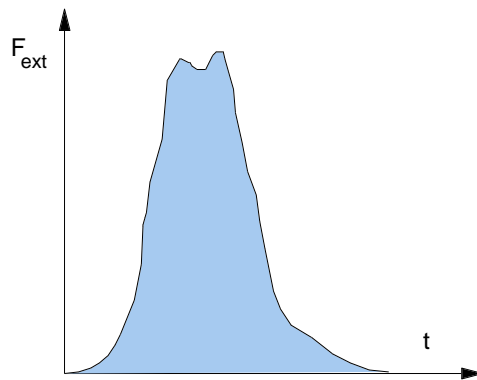


Figure 6.15 Distribution de la force en fonction du temps durant une percussion.

Ainsi, en multipliant l'équation du mouvement

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{ext} \quad (6.53)$$

par dt et en intégrant entre les instants t_0 et t_1 , on a

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}^{ext} dt. \quad (6.54)$$

Le membre de droite est appelé *percussion*, mot qui véhicule bien l'idée de quelque chose de court.

En rotation, on a l'équivalent avec l'équation

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \quad (6.55)$$

soit

$$\Delta \mathbf{L} = \mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\tau} dt. \quad (6.56)$$

Le deuxième membre est appelé *impulsion angulaire*.

Imaginons un objet posé sur une surface sans frottement, cet objet ayant une masse M et un rayon de giration k (voir figure 6.16). On frappe cet objet à une distance d de son centre de masse (point CM). Quel est le mouvement qui s'ensuit?

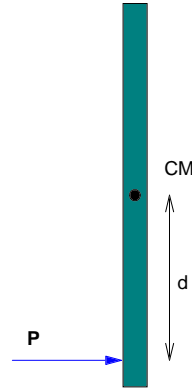


Figure 6.16

D'après ce que nous venons de voir, l'impulsion du centre de masse Mv sera égale à la percussion P , c'est-à-dire

$$P = \int F dt = Mv. \quad (6.57)$$

De plus, l'impulsion angulaire qui en résulte sera

$$\Delta L = \int dF dt = Pd = Mk^2\omega. \quad (6.58)$$

Si la quantité P est connue, il sera donc possible de déterminer le mouvement de l'objet.

Posons donc un autre problème: celui d'un objet comme le précédent mais avec un point fixe O (pivot) (voir figure 6.17). Physiquement, si on y pense un peu, on se doute que si l'on applique encore une fois un choc, à une distance h du point, il y aura vraisemblablement une réaction sur ce pivot. Or, le problème qui nous intéresse justement, c'est de savoir s'il existe une position pour le pivot pour laquelle il n'y aurait pas de réaction. C'est là, en fait, la question à laquelle font face les joueurs de base-ball ou de tennis! L'endroit privilégié qui ne fait pas *vibrer* le poignet.

Si l'on appelle P , la percussion appliquée (par l'objet que l'on frappe, par exemple), et P' , la percussion appliquée par le pivot, en réaction, on a comme équations

$$\Delta P = P + P' = Mv_{CM}, \quad (6.59)$$

la différence d'impulsion et

$$\Delta L = \int (dF - hF') dt \quad (6.60)$$

$$= dP - hP' = Mk^2\omega, \quad (6.61)$$

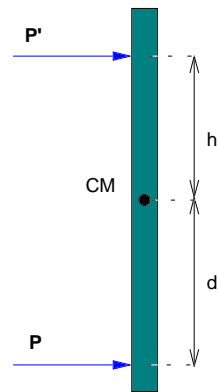


Figure 6.17 Centre de percussion.

la différence d'impulsion angulaire.

Petit problème! Nous avons trop d'inconnues pour le nombre d'équations (2): ω , P' et v_{CM} . Il faut cependant remarquer qu'il doit y avoir une relation entre ω et v_{CM} en raison du pivot. En effet, l'objet doit tourner autour du pivot ce qui signifie

$$v_{CM} = h\omega. \quad (6.62)$$

On a donc tout ce qu'il faut pour trouver la valeur de P' en fonction de P

$$P' = \frac{dh - k^2}{h^2 + k^2} P \quad (6.63)$$

ce qui nous fournit le moyen de répondre à la question posée plus haut, c'est-à-dire à quel endroit la réaction sur le pivot est nulle. De toute évidence, il faut que

$$P' = 0 \implies dh - k^2 = 0 \quad (6.64)$$

ou encore

$$d = \frac{k^2}{h}. \quad (6.65)$$

Le point qui est ainsi déterminé est appelé *centre de percussion*.

6.7 Caractère particulier de la relation entre moment cinétique et vitesse angulaire

Examinons le mouvement du système simple illustré ci-bas (voir figure 6.18) et que l'on peut décrire ainsi en se rapportant à un système d'axes fixé à l'objet; cet objet consiste en deux masses ponctuelles m attachées aux extrémités d'une tige de masse négligeable de longueur $2l$. Cette tige est plantée à un angle θ , dans un axe vertical dont les extrémités A et B sont munies de coussinets.

On suppose que ce système tourne avec une vitesse angulaire ω dirigée selon l'axe Oz , en fait autour de la tige AB . On se propose de calculer le moment cinétique de ce système.

Ayant recours à la définition

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (6.66)$$

on a pour la masse 1

$$\mathbf{L}_1 = m\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 \quad (6.67)$$

(voir figure 6.19) où la valeur \mathbf{L}_1 a comme grandeur

$$\begin{aligned} |\mathbf{L}_1| &= ml(l \sin \theta) \omega \\ &= ml^2 \omega \sin \theta. \end{aligned}$$

Ce vecteur est dans le plan des deux tiges, à un angle $\frac{\pi}{2} - \theta$ de l'axe Oz . Le même calcul répété pour la masse m_2 nous donnerait un vecteur \mathbf{L}_2 de même grandeur et de

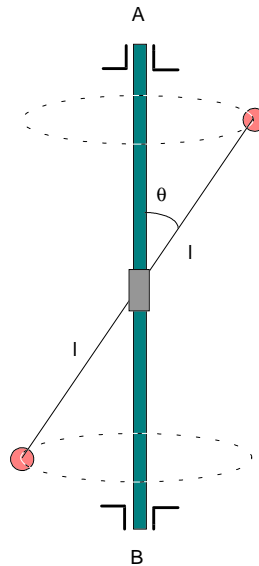


Figure 6.18 Système de deux masses ponctuelles m attachées aux extrémités d'une tige de masse négligeable et de longueur $2l$. Cette tige est plantée à un angle θ , dans un axe vertical dont les extrémités A et B sont munies de coussinets.

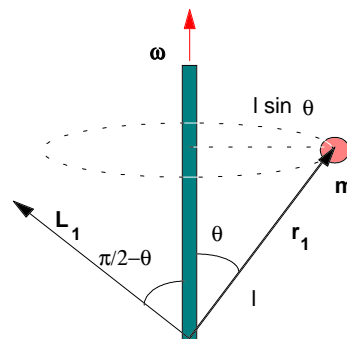


Figure 6.19 Plan supérieur de la figure précédente.

même direction que \mathbf{L}_1 ce qui veut dire qu'au total, on a pour \mathbf{L} , un vecteur de grandeur

$$|\mathbf{L}| = 2ml^2\omega \sin \theta$$

dans le plan yOz (le plan qui contient les deux tiges) et dont la direction forme un angle $\frac{\pi}{2} - \theta$ avec l'axe Oz . Si on prend la composante de ce vecteur selon l'axe Oz , on a

$$\begin{aligned} L_z &= |\mathbf{L}| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ &= 2ml^2\omega \sin^2 \theta \end{aligned}$$

ou encore

$$L_z = 2m (l \sin \theta)^2 \omega$$

où la quantité $2m (l \sin \theta)^2$ est tout simplement le moment d'inertie autour de l'axe Oz et nous retombons sur un résultat déjà rencontré précédemment. Il y a cependant quelque chose ici de nouveau. À première vue, le moment cinétique semble constant, mais ce n'est pas le cas. En fait, il ne faut pas oublier que nous l'avons calculé dans un repère lié à l'objet; il ne faut pas oublier que cet objet (la tige et les deux masses) tourne à la vitesse ω autour de Oz , ce qui veut dire que le vecteur \mathbf{L} décrit un cône autour de cet axe et donc qu'il varie dans le temps en direction (voir figure 6.20).

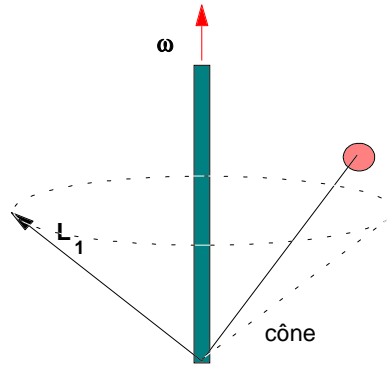


Figure 6.20 Changement de moment cinétique en fonction du temps.

En conclusion, si on applique l'équation

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (6.68)$$

on en déduit qu'il faut exercer un moment de force sur ce système. C'est là, en effet, le rôle des coussinets mentionnés au début. En effet, examinons quelle est la direction du vecteur $\boldsymbol{\tau}$.

Comme $\boldsymbol{\tau}$ n'a pas de composante selon Oz ($L_z = \text{const.}$), il est dans le plan xOy . Voyons comment varie \mathbf{L} pendant un court intervalle dt (voir figure 6.21). Le vecteur $d\mathbf{L}$ a comme grandeur

$$|d\mathbf{L}| = (L \cos \theta) d\theta \quad (6.69)$$

$$= (L \cos \theta) \omega dt \quad (6.70)$$

et comme direction, à l'instant indiqué: l'axe $-Oy$, ce qui signifie que les forces qui exercent le couple τ sont les suivantes (toujours à cet instant) une force selon Ox au point A , une force de même grandeur, mais en direction opposée, au point B .

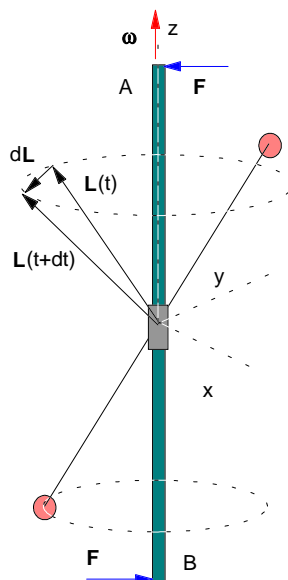


Figure 6.21 Variation du moment cinétique \mathbf{L} et moments de force exercés sur la tige.

Si on veut connaître la grandeur de τ , il suffit de remplacer L par sa valeur dans la relation précédente, soit

$$\tau = 2ml^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta$$

Avant de passer à une application pratique de ce que nous venons de voir, il est important de remarquer que dans ce système, la relation entre \mathbf{L} et $\boldsymbol{\omega}$ n'est pas de nature scalaire, c'est-à-dire, comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, le vecteur \mathbf{L} n'est pas, en général, parallèle à $\boldsymbol{\omega}$. Vous verrez, dans un autre cours, que l'inertie s'exprime plutôt par un tenseur que par un scalaire. Vous verrez aussi que *par rapport à un point donné*, tout corps possède trois axes mutuellement perpendiculaires privilégiés: quand la rotation d'un corps se fait autour de l'un de ces axes, alors \mathbf{L} est parallèle à $\boldsymbol{\omega}$. On appelle ces axes: *axes principaux* (par rapport à ce point). Dans tous les cas rencontrés avant ce paragraphe, nous avons toujours affaire à des axes principaux: en effet, lorsqu'un corps a une certaine symétrie, les axes de symétrie coïncident sont des axes principaux. Ainsi, pour un cylindre, par exemple, l'axe de révolution est un axe de symétrie, donc un axe principal; deux autres axes mutuellement perpendiculaires, ainsi que l'axe de révolution, viendront compléter l'ensemble des axes principaux.

Dans le cas du système étudié depuis le début du paragraphe, les axes principaux seraient: l'axe qui passe par la tige et les deux masses et deux axes perpendiculaires à

cette tige. Ici, ces derniers axes sont dits dégénérés puisqu'ils sont laissés entièrement à notre choix. C'est toujours le cas lorsqu'il y a symétrie de révolution.



Exemple 6.4

Équilibrage des roues d'une automobile

L'opération qui consiste à équilibrer les roues d'une automobile (balancer comme on dit au Québec) se fait en deux étapes, dont la première est l'équilibrage statique. Il s'agit de s'assurer que le centre de masse du pneu coïncide avec l'axe de rotation. Si le pneu est placé sur un axe horizontal très sensible, il devrait rester immobile quelle que soit sa position angulaire sur l'axe; s'il tend à tourner pour se placer dans une position privilégiée, c'est que son centre de masse est en dehors de l'axe, ce qu'on corrige en ajoutant une masse à l'opposé. On peut ensuite procéder à l'équi-

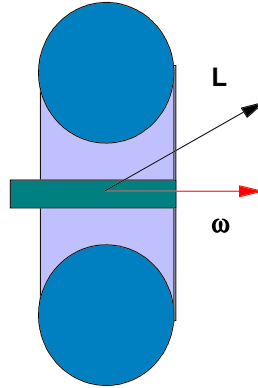


Figure 6.22 Section efficace d'une roue d'automobile: Les roues ne sont pas "balancées" lorsque le moment cinétique \mathbf{L} n'est pas parallèle à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$.

librage dynamique qui consiste, en fait, à corriger la différence de parallélisme entre le moment cinétique de la roue et l'essieu (axe de rotation) (voir figure 6.22). Pour cette opération qui nécessite que l'on fasse tourner la roue, il s'agit de détecter s'il s'exerce un couple de force sur l'axe pendant la rotation de la roue. Si c'est le cas, c'est que \mathbf{L} n'est pas parallèle à $\boldsymbol{\omega}$. On corrige la situation cette fois à l'aide de deux masses de même grandeur placées d'un côté et de l'autre de la roue mais dans des positions diamétralement opposées. On arrive ainsi à faire de l'axe de la roue, un axe principal d'inertie.

6.8 Introduction au gyroscope

Il est bien entendu que nous ne ferons, ici, qu'effleurer le sujet étant connu que le gyroscope peut faire l'objet de traités de plusieurs centimètres d'épaisseur et qu'il fera l'objet d'une partie du cours *Mécanique classique II*.

Pour le physicien, le gyroscope (voir la figure 6.23) dans sa plus simple expression, est un corps rigide de symétrie axiale, en mouvement de rotation autour de cet axe et libre de se déplacer angulairement dans n'importe laquelle direction autour de son centre de masse. Dans la pratique, le gyroscope est formé par un disque ou une roue (anneau)

installé dans une monture à cadran qui permet, justement, la liberté de mouvement dans toutes les directions.

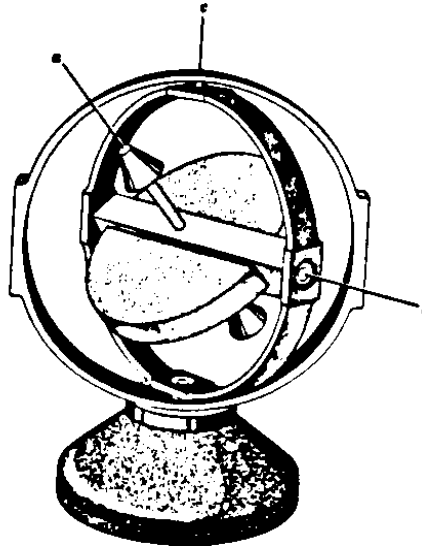


Figure 6.23 Le gyroscope.

Si le gyroscope est bien équilibré, c'est-à-dire si son centre de masse est exactement au centre de la suspension, aucun moment de force ne s'exerce sur lui de telle sorte que son moment cinétique doit *demeurer constant*. Ainsi, si on pointe l'axe vers une étoile, par exemple, il demeurera dans cette direction. Il ne faut cependant pas oublier que la Terre tourne, ce qui signifie que par rapport à la Terre, son orientation paraîtra changer au cours du temps. On sait que le gyroscope est utilisé comme gyrocompas dans les systèmes de guidage par sa propriété de conserver sa position par rapport aux étoiles.

On peut se poser la question: Pourquoi utiliser un gyroscope puisqu'un corps rigide installé dans la même suspension, mais ne tournant pas, indiquerait toujours, lui aussi, la même direction? Il suffit d'expérimenter un peu avec un gyroscope pour se rendre compte que même si on lui applique une petite perturbation, un petit choc, par exemple, sa direction ne changera à peu près pas. Il n'en serait pas de même de notre solide non-tournant qui, lui, verrait son orientation changer indéfiniment, s'il n'y a pas de frottement dans la suspension.

Gyroscope soumis à un moment de force constant

Supposons maintenant que l'on exerce un moment de force en attachant, par exemple, une masse sur l'axe de rotation (voir figure 6.24). Nous allons utiliser des axes choisis ainsi: l'axe Oz selon l'axe de rotation et les axes Ox et Oy dans le plan du disque, l'axe

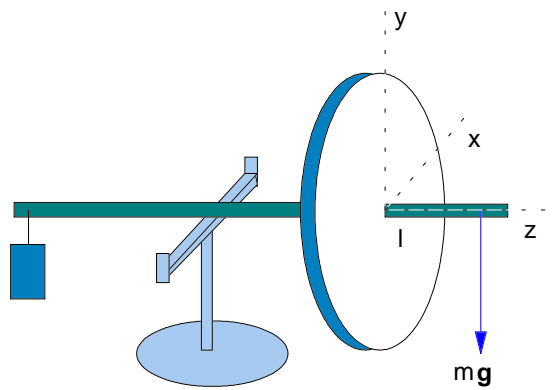


Figure 6.24 Exemple de gyroscope simple.

Oy étant opposé à la force qui s'exerce sur l'axe, c'est-à-dire que

$$\mathbf{F}_g = -mg\mathbf{j} \quad (6.71)$$

ce qui donne un moment de force

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}_g \\ &= mgl\mathbf{i}. \end{aligned}$$

En raison de l'action de ce moment de force pendant un intervalle de temps Δt , le moment cinétique \mathbf{L} du gyroscope va subir un changement

$$\Delta \mathbf{L} = \boldsymbol{\tau} \Delta t = mgl\Delta t \mathbf{i} \quad (6.72)$$

et si l'on examine la figure 6.25, on voit que l'on peut aussi écrire que

$$\Delta \mathbf{L} = |\mathbf{L}| \Delta \varphi \mathbf{i} \quad (6.73)$$

où $\Delta \varphi$ est un angle de rotation autour de l'axe Oy . Comme $|\mathbf{L}| = I\omega$, on a en

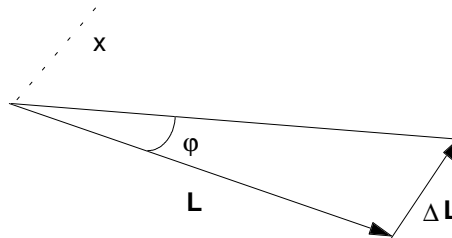


Figure 6.25 Variation du moment cinétique causé par le moment de force.

combinant les équations (6.72) et (6.73)

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{mgl}{I\omega} \quad (6.74)$$

et cette quantité, une vitesse angulaire selon l'axe Oy , que nous appellerons Ω est la *précession* (lente) du gyroscope. Il existe aussi une précession dite rapide, mais c'est habituellement la *précession* lente qui est observée.

À ce mouvement de précession peut se superposer une oscillation de l'axe du gyroscope. C'est ce qu'on appelle la *nutation* (voir figure 6.26).

Précession des équinoxes

En raison du fait que la Terre n'est pas sphérique et que de plus elle est penchée sur son orbite, la force exercée par le Soleil et aussi par la Lune, mais à un degré moindre, n'a pas la même grandeur sur la portion du renflement proche du Soleil que sur la portion éloignée, la distance de chaque portion au Soleil n'étant pas la même. Ceci crée un moment de force sur la Terre et entraîne un mouvement de précession nommé *précession*

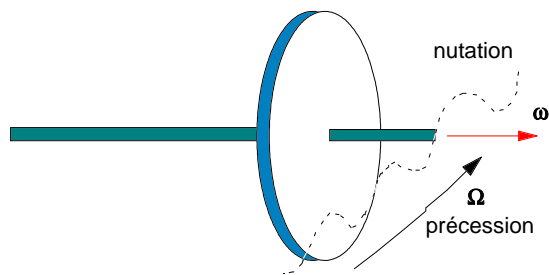


Figure 6.26 Mouvement de précession et de nutation du gyroscope simple.

des équinoxes. Sa période est d'environ 27 000 années.



Annexe A: Notations, conventions,...

A.1 Notations et conventions

Dans cet ouvrage, un certain nombre de conventions ont été adoptées pour faciliter la lecture. Les vecteurs sont notés par des caractères gras

$$\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{F}, \dots \quad (\text{A.1})$$

Les unités naturelles (UN) sont définies de façon à ce que les constantes fondamentales que sont la constante de Planck et la vitesse de la lumière soient

$$\begin{aligned} \hbar &= 1 \\ c &= 1. \end{aligned}$$

Elles sont utiles dans les systèmes physiques relativistes et/ou qui impliquent des effets quantiques mesurables. Une quantité dans les unités SI (système internationale) qui possède des dimensions

$$M^p L^q T^r$$

ou M , L et T représente les unités de masse, longueur et temps respectivement, aura des unités d'énergie à la puissance $p - q - r$, soit E^{p-q-r} .

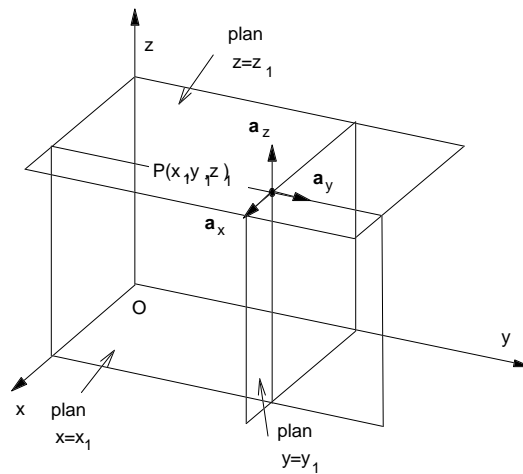
Quantité	SI			UN
	p	q	r	n
Action	1	2	-1	0
Vitesse	0	1	-1	0
Masse	1	0	0	1
Longueur	0	1	0	-1
Temps	0	0	1	-1
Momentum	1	1	-1	1
Énergie	1	2	-2	1
Const. structure fine α	0	0	0	0
Const. de Fermi	1	5	-2	-2

L'alphabet grec est utilisé fréquemment:

Majuscule	Minuscule	Prononciation
A	α	alpha
B	β	bêta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ϵ, ε	epsilon
Z	ζ	zeta
H	η	eta
Θ	θ, ϑ	theta
I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mu
N	ν	nu
Ξ	ξ	xi
O	o	omicron
Π	π	pi
P	ρ	rho
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Υ	υ	upsilon
Φ	ϕ, φ	phi
Ψ	ψ	psi
X	χ	chi
Ω	ω, ϖ	omega

A.2 Systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes



Les vecteurs unitaires d'un système de coordonnées cartésiennes $\hat{\mathbf{a}}_x, \hat{\mathbf{a}}_y, \hat{\mathbf{a}}_z$ ont les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{a}}_x \times \hat{\mathbf{a}}_y &= \hat{\mathbf{a}}_z \\ \hat{\mathbf{a}}_y \times \hat{\mathbf{a}}_z &= \hat{\mathbf{a}}_x \\ \hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{a}}_x &= \hat{\mathbf{a}}_y.\end{aligned}\tag{A.2}$$

Un vecteur \mathbf{A} dans ce système de coordonnées s'exprime souvent sous la forme de ses composantes $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ce qui représente la somme vectorielle

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_x A_x + \hat{\mathbf{a}}_y A_y + \hat{\mathbf{a}}_z A_z.\tag{A.3}$$

Les éléments de longueur, $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)$, de surface, (ds_x, ds_y, ds_z) , et de volume, dv , sont respectivement

$$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{a}}_x dx + \hat{\mathbf{a}}_y dy + \hat{\mathbf{a}}_z dz\tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}ds_x &= dydz \\ ds_y &= dxdz\end{aligned}\tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}ds_z &= dxdy \\ dv &= dxdydz.\end{aligned}\tag{A.6}$$

Remarque 8 Dans ces notes, nous allégeons la notation en prenant

$$\hat{\mathbf{a}}_x, \hat{\mathbf{a}}_y, \hat{\mathbf{a}}_z = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \quad (\text{A.7})$$

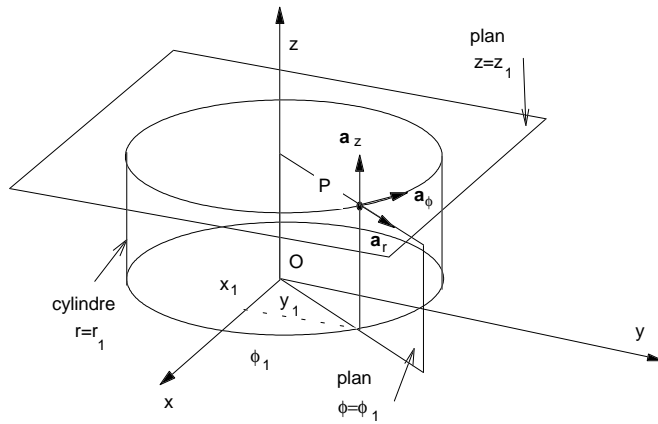
mais dans la littérature, les vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{a}}_x, \hat{\mathbf{a}}_y, \hat{\mathbf{a}}_z$ s'écrivent aussi souvent sous les formes variées

$$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$$

$$\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z.$$

Coordonnées cylindriques



Les vecteurs unitaires d'un système de coordonnées cylindriques $\hat{\mathbf{a}}_r, \hat{\mathbf{a}}_\phi, \hat{\mathbf{a}}_z$ ont les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_r \times \hat{\mathbf{a}}_\phi &= \hat{\mathbf{a}}_z \\ \hat{\mathbf{a}}_\phi \times \hat{\mathbf{a}}_z &= \hat{\mathbf{a}}_r \\ \hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{a}}_r &= \hat{\mathbf{a}}_\phi. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Un vecteur \mathbf{A} dans ce système de coordonnées s'exprime souvent sous la forme de ses composantes $\mathbf{A} = (A_r, A_\phi, A_z)$ ce qui représente la somme vectorielle

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_r A_r + \hat{\mathbf{a}}_\phi A_\phi + \hat{\mathbf{a}}_z A_z. \quad (\text{A.9})$$

Les éléments de longueur, $d\mathbf{l} = (dr, d\phi, dz)$, de surface, (ds_r, ds_ϕ, ds_z) , et de volume, dv , sont respectivement

$$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{a}}_r dr + \hat{\mathbf{a}}_\phi r d\phi + \hat{\mathbf{a}}_z dz \quad (\text{A.10})$$

$$ds_r = r d\phi dz$$

$$ds_\phi = dr dz \quad (\text{A.11})$$

$$ds_z = r dr d\phi$$

$$dv = r dr d\phi dz. \quad (\text{A.12})$$

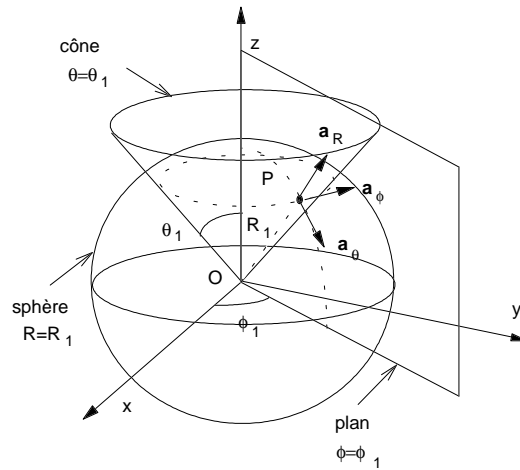
Les relations de transformations de coordonnées cylindriques à coordonnées cartésiennes sont les suivantes:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \\ z &= z \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

et inversement

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \arctan \frac{y}{x} \\ z &= z. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Coordonnées sphériques



Les vecteurs unitaires d'un système de coordonnées sphériques $\hat{\mathbf{a}}_R, \hat{\mathbf{a}}_\theta, \hat{\mathbf{a}}_\phi$ ont les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_R \times \hat{\mathbf{a}}_\theta &= \hat{\mathbf{a}}_\phi \\ \hat{\mathbf{a}}_\theta \times \hat{\mathbf{a}}_\phi &= \hat{\mathbf{a}}_R \\ \hat{\mathbf{a}}_\phi \times \hat{\mathbf{a}}_R &= \hat{\mathbf{a}}_\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Un vecteur \mathbf{A} dans ce système de coordonnées s'exprime souvent sous la forme de ses composantes $\mathbf{A} = (A_R, A_\theta, A_\phi)$ ce qui représente la somme vectorielle

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_R A_R + \hat{\mathbf{a}}_\theta A_\theta + \hat{\mathbf{a}}_\phi A_\phi. \quad (\text{A.16})$$

Les éléments de longueur, $d\mathbf{l} = (dR, d\phi, dz)$, de surface, $(ds_R, ds_\theta, ds_\phi)$, et de volume,

dv , sont respectivement

$$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{a}}_r dr + \hat{\mathbf{a}}_\theta R d\theta + \hat{\mathbf{a}}_\phi R \sin \theta d\phi \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} ds_R &= R^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ ds_\theta &= R \sin \theta dR d\phi \\ ds_\phi &= R dR d\theta \\ dv &= R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Les relations de transformations de coordonnées sphériques à coordonnées cartésiennes sont les suivantes:

$$\begin{aligned} x &= R \sin \theta \cos \phi \\ y &= R \sin \theta \sin \phi \\ z &= R \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

et inversement

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \phi &= \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

A.3 Aide-mémoire

Relativité restreinte

Transformation de Lorentz des coordonnées

$$\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - vx) & t &= \gamma(t' + vx') \\ x' &= \gamma(x - vt) & x &= \gamma(x' + vt') \\ y' &= y & y &= y' \\ z' &= z & z &= z' \end{aligned}$$

Transformation de Lorentz des vitesses

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - u_x v} & u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v} \\ u'_y &= \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v)} & u_y &= \frac{u'_y}{\gamma(1 + u'_x v)} \\ u'_z &= \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v)} & u_z &= \frac{u'_z}{\gamma(1 + u'_x v)} \end{aligned}$$

Contraction et dilatation

contraction

$$l = \frac{l_p}{\gamma}$$

dilatation

$$t = \gamma t_p$$

Transformation de Lorentz de l'énergie-impulsion:

$$\begin{aligned} E' &= \gamma(E - vp_x) & E &= \gamma(E' + vp'_x) \\ p'_x &= \gamma(p_x - vE) & p_x &= \gamma(p'_x + vE') \\ p'_y &= p_y & p_y &= p'_y \\ p'_z &= p_z & p_z &= p'_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^\mu &= (\gamma m_p, \gamma m_p \mathbf{v}) \\ E^2 &= \mathbf{p}^2 + m_p^2 \end{aligned}$$

$$1 \text{ GeV} = 10^3 \text{ MeV} = 10^9 \text{ eV}$$

$$1 \text{ eV} = 1.62 \times 10^{-16} \text{ J}$$

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

où m_p, l_p, t_p = masse, longueur et temps propre respectivement.

Repères accélérés

Forces physiques et fictives:

$$\mathbf{F} - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = m\mathbf{a}$$

où \mathbf{F} est la résultante des forces physiques

$$\mathbf{F}_{\text{Azimuthale}} = -m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{F}_{\text{Coriolis}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

$$\mathbf{F}_{\text{Centrifuge}} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

avec $\boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\omega}}$ = vitesse et accélération angulaire de l'objet en rotation et $\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a}$ = position, vitesse et accélération dans le repère accéléré.

Force centrifuge dans le repère terrestre:

$$|\mathbf{F}_{\text{Centrifuge}}| = mr\omega^2 \cos \lambda, \quad \text{pour } \lambda = \text{latitude}$$

Corps solide

Moments d'inertie I par rapport à l'axe de symétrie:

$$\text{Tige mince p/r extrémité} \quad \frac{1}{3}MR^2$$

$$\text{Tige mince p/r centre} \quad \frac{1}{12}MR^2$$

$$\text{Sphère pleine:} \quad \frac{2}{5}MR^2$$

$$\text{Sphère creuse ou coquille mince:} \quad \frac{2}{3}MR^2$$

$$\text{Disque ou cylindre plein:} \quad \frac{1}{2}MR^2$$

$$\text{Cylindre creux ou anneau mince:} \quad MR^2$$

$$\text{Anneau épais:} \quad \frac{1}{2}M(R_{\text{int}}^2 + R_{\text{ext}}^2)$$

Dynamique

$$\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{L}} = I\boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Condition de roulement sans glissement

$$v = \omega R$$

Théorème des axes parallèles:

$$I = I_{CM} + M \cdot d^2$$

Théorème des plaques minces:

$$I_z = I_x + I_y$$

Constantes usuelles:

$$\text{Accélération gravitationnelle:} \quad g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\text{Rayon terrestre:} \quad R = 6378 \text{ km}$$

$$\text{Vitesse angulaire terrestre:} \quad \omega = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

A.4 Références

Les notes suivent assez bien les sections correspondantes des volumes suivants et ceux-ci peuvent être utilisés à titre complémentaire.

1. *Mécanique. Berkeley: cours de physique, volume I*, C. Kittel, W. Knight et M.A. Ruderman, Armand Collin (1965).
2. *Mechanics. Berkeley physics course*, C. Kittel, W. Knight et M.A. Ruderman, McGraw-Hill (1965).

D'autres ouvrages portant sur la relativité peuvent être consultés:

1. *Space-Time Physics*, E. Taylor et J.A. Wheeler, Longmann.
2. *Special Relativity*, A.P. French, Norton.
3. *Introduction to Special Relativity*, R. Resnick, Wiley.
4. *Introduction à la relativité*, J.H. Smith, Édiscience.

Les ouvrages suivants se rapportent à la mécanique classique vue dans ces notes:

1. *Classical Mechanics*, J.B. Marion.
2. *Introductory Mechanics*, E.F. Taylor.



Index

- Accélérateurs de particules, 65
- Accélération dans un champ électrique constant, 65
- Addition de vitesses, 34
- Axes parallèles
 - théorème des , 109
- Calibration des axes, 28
- Causalité, 27
- Centre de masse, 100
 - vitesse, 71
- Cinématique de rotation, 113
- Collision inélastique, 60
- Composantes covariantes, 48
- Conservation de l'énergie, 117
- Conservation de l'impulsion, 53, 100
- Conservation du moment cinétique, 100, 113
- Contraction de l'espace, 37
- Coordonnées
 - cartésiennes, 135
 - cylindriques, 136
 - sphériques, 137
- Corps rigide (voir aussi solides), 103
- Cyclones, 96
- Déflexion dans un champ électrique, 68
- Diagrammes espace-temps, 19
- Dilatation du temps, 39
- Dynamique d'un ensemble de particules, 99
- Dynamique de la rotation, 116
- Dynamique des solides, 99
- Dynamique relativiste, 53
- Effet Compton, 72
- Effet Doppler
 - cas non-relativiste, 4
 - cas relativiste, 43
 - mouvement longitudinal, 43
 - mouvement transversal, 44
- Effet Doppler, 63
- Énergie cinétique, 56, 101
- Énergie disponible, 72
- Équation de mouvement, 113
- Équinoxes, 129
- Événements
 - Classification des, 27
 - genre espace, 27
 - genre lumière, 27
 - genre temps, 27
- Formalisme quadri-dimensionnel, 46
- Foucault, pendule de , 96
- Frottement, 76, 114
- Giration, rayon de , 109
- Glissement, 114
- Gravité apparente, 91
- Gyroscope, 126
 - moment de force, 127
- Horloges accélérées, 46
- Intervalle, 22
- Invariance de la charge électrique, 64
- Lorentz
 - transformations de , 31
 - transformations de , 59
- Métrie, 47
- Michelson-Morley, Expérience de , 7
- Minkowski, diagrammes de, 19
- Moment cinétique, 100, 122
- Moments d'inertie, 105
- Mouvement, 77
- Mouvements observés de la surface de la Terre, 91
- Mouvements, translation et rotation, 113
- Newton, deuxième loi de , 75
- Observateur, 16
- Particule dans un champ magnétique, 69
- Particules de masse nulle, 62

- Pendule de Foucault, 96
- Percussion et rotation, 119
- Précession, 129
- Pression de radiation, 63
- Projectile, 93

- Quadri-vecteur
 - d'énergie-impulsion, 56
 - de position espace-temps, 46

- Rayon de giration, 109
- Récession des galaxies, 6
- Relativité restreinte
 - et géométrie, 19
 - limites de la , 28
- Repères
 - accélérés, 75, 77
 - accélérés linéairement, 77
 - en rotation, 78, 88
 - inertiels, 7
- Rotation d'un corps, 104
- Roulement, 114

- Seuil de réactions, 69
- Source au repos, 5
- Source en mouvement, 4
- Synchronisation des horloges, 16
- Système de coordonnées, 20

- Tenseur métrique, 47
- Théorème
 - des axes parallèles, 109
 - des axes perpendiculaires, 110
 - des plaques minces, 110
- Tranformations
 - de Lorentz, 31
- Transformation
 - d'une force, 63
 - de Lorentz, 59
- Travail, et énergie cinétique, 59

- Vitesse angulaire, 122
- Vitesse de la lumière
 - mesures, 1
 - universalité, 17
 - vitesse ultime, 12